

УДК 621.45.017

DOI: 10.20535/1810-0546.2017.2.96257

О.М. Сапегін\*, М.В. Норенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

## АЛГОРИТМ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ НА ЛАЗЕРНИХ ГІРОСКОПАХ

**Background.** The paper is dedicated to improving the accuracy of strapdown inertial systems by improving the algorithmic software.

**Objective.** The aim of the paper is the development and analysis of the accuracy of a strapdown inertial orientation system algorithms.

**Methods.** Construction of a strapdown attitude reference system algorithms based on kinematic equation of Poisson and quaternions. The input data for the orientation algorithms are signals from the real laser gyroscopes installed in the system. Orientation equation integration is performed using the Runge–Kutta methods.

**Results.** The attitude system errors, depending of the different vehicle motions are determined.

**Conclusions.** Research of selected orientation algorithms and numerical integration showed their high accuracy. They may be used in the design of precision strapdown inertial systems.

**Keywords:** ring laser gyro; Poisson equation; quaternion; math modeling; strapdown inertial attitude system.

### Вступ

Безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС) будуються з використанням тріади навігаційних акселерометрів і трьох датчиків кутової швидкості. Якщо сигнал з акселерометра застосовується для подвійного інтегрування уявного прискорення та знаходження приросту координати, то датчики кутової швидкості необхідні для моделювання на рухомому об'єкті опорної системи координат. Систему, яка з використанням сигналу з датчиків кутів БІНС знаходить поточну орієнтацію об'єкта (визначає взаємозв'язок опорної та рухомої систем координат), назовемо безплатформною інерціальною системою орієнтації (БІСО) [1].

Як датчики кутів сучасних БІСО застосовують волоконно-оптичні, кільцеві лазерні [1–3], динамічно настроєні гіроскопи [4] та прецизійні мікромеханічні системи [5].

На точність БІСО впливають не тільки характеристики датчиків, а й методична точність алгоритмічного забезпечення. Алгоритм БІСО можна умовно поділити на дві частини: алгоритм визначення орієнтації та його числове інтегрування.

Існує декілька способів визначення орієнтації об'єкта:

- рівняння Ейлера;
- кінематичне рівняння Пуассона;
- кватерніонне рівняння.

Рівняння Ейлера найбільш наочне і просте у використанні, проте воно вироджується при складних еволюціях об'єкта [6–8]. Кінематичне

рівняння Пуассона досить просте для освоєння та реалізації. Його використання дає можливість отримувати одразу матрицю напрямних косинусів переходу рухомої системи координат в опорну без додаткових перетворень. Кватерніонне рівняння орієнтації найбільш поширене через свою достатню точність і швидкодію.

Як датчик кутової швидкості в дослідженні використані лазерні гіроскопи, за алгоритм числового інтегрування взято методи Рунге–Кутти [10].

### Постановка задачі

Метою роботи є апробація розроблених алгоритмів БІСО [10, 11] на реальних сигналах високоточних датчиків.

### Математична модель

Математичними моделями БІСО було вибрано кінематичне рівняння Пуассона та векторне рівняння у кватерніонах [7].

Безпосередньо визначити матрицю напрямних косинусів (МНК) можна інтегруванням проєкцій вектора кутової швидкості у кінематичному рівнянні Пуассона:

$$\frac{dC^{SP}}{dt} = C^{SP} \cdot (\omega_P^{PS} \times), \quad (1)$$

де  $C^{SP}$  – МНК між нерухою системою координат  $S$  і системою координат  $P$ , пов'язаною

\* corresponding author: sapegin\_a@ukr.net

з рухомим об'єктом;  $\omega^{PS}$  – вектор кутової швидкості рухомої системи координат відносно нерухомої.

Права частина цього матричного диференціального рівняння має вигляд

$$Z(t, C^{SP}) = C^{SP}(\omega_p^{PS} \times). \quad (2)$$

Алгоритми методів Рунге–Кутти використовують інформацію про виміряні значення вектора кутової швидкості основи.

Всі алгоритми Рунге–Кутти проводять інтегрування рівняння Пуассона (1) відповідно до формули

$$C_{N+1}^{SP} = C_N^{SP} + H \cdot F(t_N, C_N^{SP}),$$

де  $N$  – номер попереднього моменту часу інтегрування  $t_N$ ;  $C_N^{SP}$  – значення МНК у поточний момент часу;  $C_{N+1}^{SP}$  – значення МНК у момент часу через крок інтегрування;  $F(t_N, C_N^{SP})$  – деяка функція значень правої частини рівняння (1).

Хоча кінематичне рівняння руху Пуассона досить просто отримати для заданої кінематики руху, проте його використання часто не вигідне через матричне подання математичної моделі. Це призводить до навантаження на бортовий комп'ютер.

Ці проблеми можна частково вирішити, перейшовши до іншого способу опису кінематики рухомого об'єкта у просторі – використання кватерніонів поворотів. Векторне рівняння орієнтації має вигляд

$$\frac{dQ^{SP}}{dt} = \frac{1}{2} Q^{SP} \circ \Omega_p^{PS}, \quad (3)$$

де  $Q^{SP}$  – кватерніон повороту між нерухомою системою координат  $S$  і системою координат  $P$ ,

пов'язаною з рухомим об'єктом;  $\Omega_p^{PS}$  – вектор-кватерніон із проєкцій кутової швидкості рухомої системи відліку  $P$ .

Вектор  $\Omega_p^{PS}$  визначається з проєкцій вектора кутової швидкості  $\omega^{PS}$  обертання системи  $P$  відносно системи  $S$ :

$$\Omega_p^{PS} = 1_p \cdot \omega_{1p}^{SP} + 2_p \cdot \omega_{2p}^{SP} + 3_p \cdot \omega_{3p}^{SP}.$$

Права частина цього векторного диференціального рівняння (3) має вигляд

$$Z(t, Q^{SP}) = Q^{SP}(\Omega_p^{PS} \times). \quad (4)$$

Значення проєкцій кутової швидкості об'єкта  $\omega^{PS}$  формувалися із сигналів кільцевих лазерних гіроскопів (КЛГ) навігаційної системи виробництва КП СПБ “Арсенал”. Навігаційна система та випробувальний стенд показані на рис. 1.

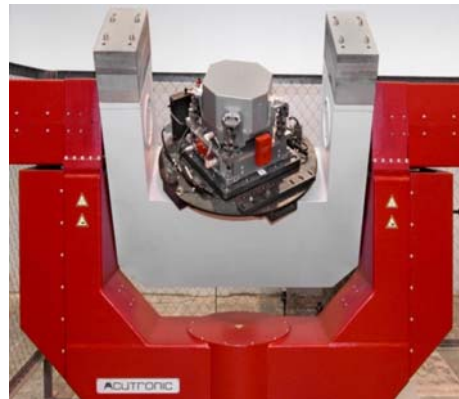


Рис. 1. БІНС на тривісному поворотному столі

Вигляд функцій (2) і (4) для досліджуваних методів Рунге–Кутти у момент часу  $t$  наведено в таблиці. Використовувалися методи другого та четвертого порядків, які позначені відповідно RK21 і RK41 [9].

Таблиця. Вигляд функції  $F$  для методів Рунге–Кутти

Метод	Вигляд функції $F$	Допоміжні величини для рівняння Пуассона	Допоміжні величини для кватерніонного рівняння
RK21	$F = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$	$k_1 = Z(t_N; C_N^{SP})$ $k_2 = Z(t_N + H; C_N^{SP} + Hk_1)$	$k_1 = Z(t_N; Q_N^{SP})$ $k_2 = Z(t_N + H; Q_N^{SP} + Hk_1)$
RK41	$F = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	$k_1 = Z(t_N; C_N^{SP})$ $k_2 = Z\left(t_N + \frac{H}{2}; C_N^{SP} + H\frac{k_1}{2}\right)$ $k_3 = Z\left(t_N + \frac{H}{2}; C_N^{SP} + \frac{Hk_2}{2}\right)$ $k_4 = Z(t_N + H; C_N^{SP} + Hk_3)$	$k_1 = Z(t_N; Q_N^{SP})$ $k_2 = Z\left(t_N + \frac{H}{2}; Q_N^{SP} + \frac{Hk_1}{2}\right)$ $k_3 = Z\left(t_N + \frac{H}{2}; Q_N^{SP} + \frac{Hk_2}{2}\right)$ $k_4 = Z(t_N + H; Q_N^{SP} + Hk_3)$

### Алгоритм БІСО

На основі математичних моделей кінематичного рівняння орієнтації Пуассона (1) та кватерніонного рівняння (3) було створено алгоритм, який дає змогу встановити значення кутів орієнтації в географічній системі координат, використовуючи значення проєкцій кутових швидкостей з кільцевих лазерних гіроскопів. Розрахунок кутів орієнтації проводиться числовим інтегруванням кінематичного рівняння Пуассона та кватерніонного рівняння методами Рунге–Кутти з використанням моделей (2) і (4). Методи Рунге–Кутти формуються з використанням коефіцієнтів, наведених у таблиці. Розробка алгоритму системи спиралась на роботу [12].

Алгоритм БІСО зображено на рис. 2.

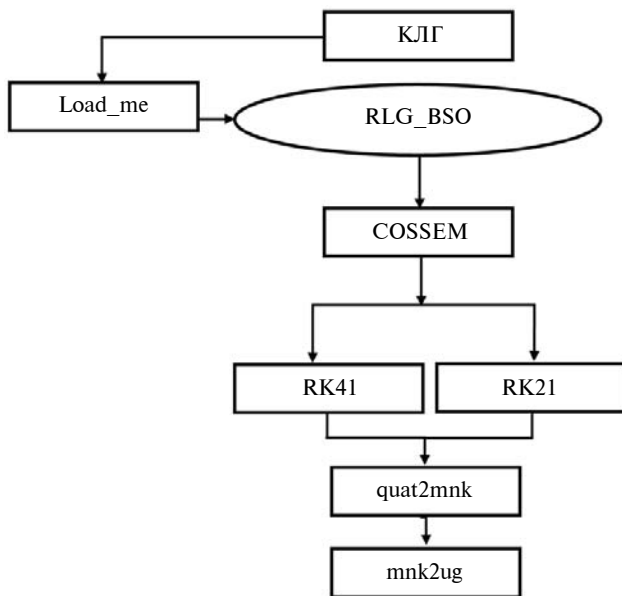


Рис. 2. Структура алгоритму БІСО

Пояснимо роботу окремих компонентів.

Керувальна програма **RLG\_BSO.m** задає початкові умови і параметри моделі, реалізує процес числового інтегрування, забезпечує зв'язок окремих процедур і виводить результат у вигляді графічних залежностей кутових швидкостей і кутів від часу.

Процедура **Load\_me** завантажує та калібрує сигнали лазерних гіроскопів.

Процедура **cossem.m** формує елементи кососиметричної матриці з проєкцій кутової швидкості.

Процедура **mnk2ug.m** обчислює кути повороту з матриці напрямних косинусів.

Процедура **quat2mnk.m** створює матрицю напрямних косинусів з вектора кватерніонів.

### Результати моделювання

Результати моделювання створеного алгоритму методами Рунге–Кутти четвертого порядку показані на рис. 3–5. Моделювання методами другого порядку відрізняються незначним зменшенням точності.

На рис. 3, *a* зображено графік проєкцій кутових швидкостей інерціального модуля в статичному режимі (на нерухомій основі), вісь чутливості *Y* БІСО спрямована вгору. Як видно з графіка, кутові швидкості практично не дрейфують щодо свого нульового положення. Результати числового інтегрування кватерніонного рівняння орієнтації показані на рис. 3, *б*. Видно, що вертикальна складова кутової швидкості обертання Землі призводить до дрейфу по куту  $\psi$ , а горизонтальна – по куту  $\phi$ , що свідчить про високу точність КЛГ.

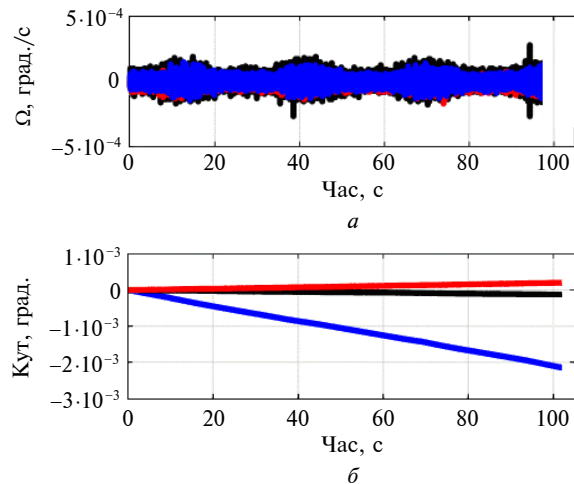


Рис. 3. БІСО на нерухомій основі: *a* – проєкції кутової швидкості: ■ –  $\omega_X$ , ■ –  $\omega_Y$ , ■ –  $\omega_Z$ ; *б* – інтегрування кватерніонного рівняння RK41: ■ –  $\psi$ , ■ –  $\theta$ , ■ –  $\phi$

Моделювання, результати якого показані на рис. 4, проводилося на тривісному поворотному столі з високою стабільністю кутової швидкості обертання (див. рис. 1). При цьому були отримані дані з БІНС при обертанні навколо всіх трьох осей і за різних значень кутової швидкості. На рис. 4, *a* зображено графік проєкцій кутової швидкості з лазерних гіроскопів. З нього видно, що на вхід алгоритму БІСО подається постійна кутова швидкість по осі *X*, а по інших осях обертання відсутнє. На рис. 4, *б, в* подані результати моделювання алгоритмів орієнтації Пуассона та кватерніонів методом числового інтегрування Рунге–Кутти четвертого порядку. З них видно

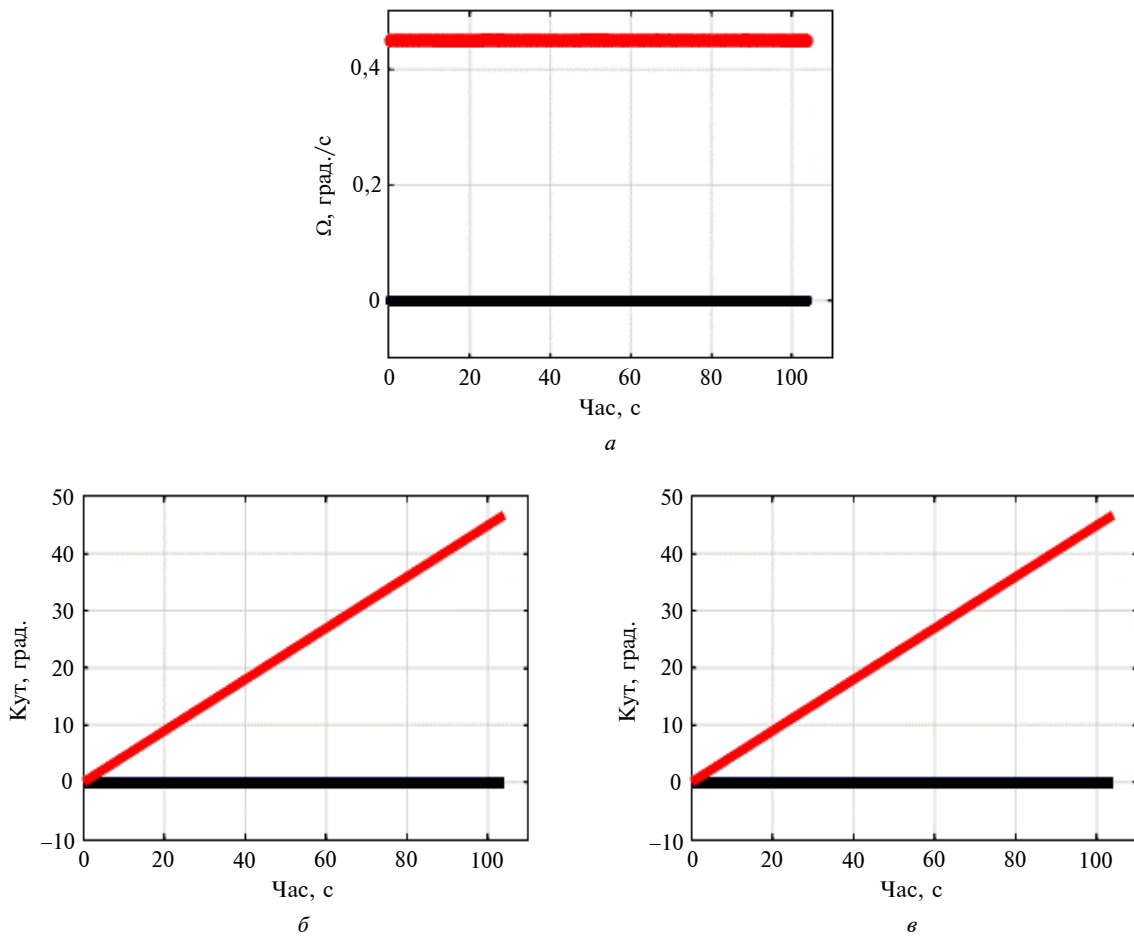


Рис. 4. БІСО при повороті основи навколо осі  $X$ :  $a$  – кутова швидкість:  $\text{—}$   $\omega X$ ,  $\text{—}$   $\omega Y$ ,  $\text{—}$   $\omega Z$ ;  $b$  – алгоритм Пуассона:  $\text{—}$   $\psi$ ,  $\text{—}$   $\theta$ ,  $\text{—}$   $\varphi$ ;  $v$  – кватерніони:  $\text{—}$   $\psi$ ,  $\text{—}$   $\theta$ ,  $\text{—}$   $\varphi$

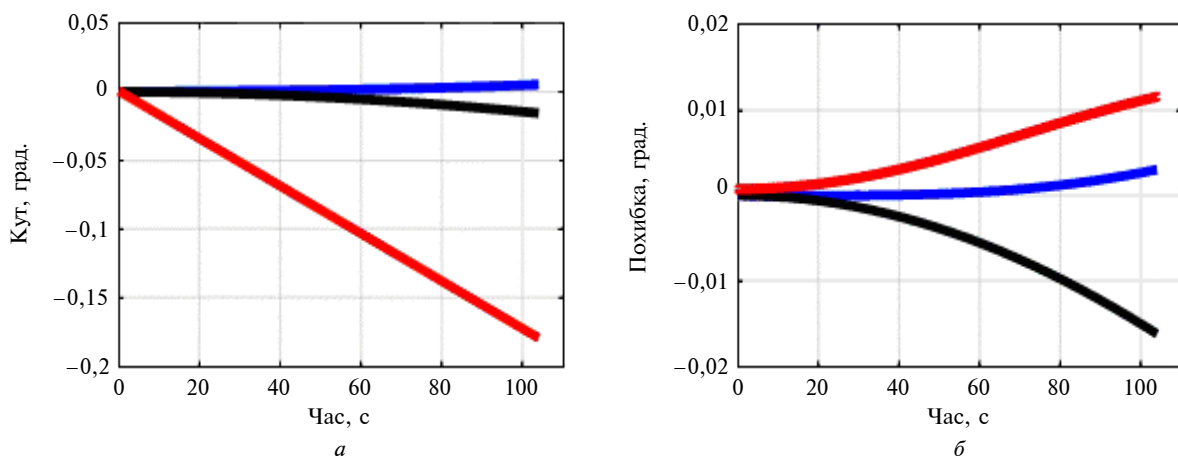


Рис. 5. Похибки алгоритмів БІСО:  $a$  – алгоритм Пуассона;  $b$  – кватерніони:  $\text{—}$   $\delta\psi$ ,  $\text{—}$   $\delta\theta$ ,  $\text{—}$   $\delta\varphi$

постійний дрейф по куту  $\varphi$ , що і відповідає постійній кутовій швидкості по осі  $X$ . Обидва графіки дуже схожі, проте необхідно встановити, який із алгоритмів забезпечує найбільшу точність. Для цього досить знати кутову швидкість

стенда в момент випробування та відняти від неї значення, отримані на виході алгоритмів. Абсолютні похибки алгоритмів Пуассона та кватерніонів продемонстровані відповідно на рис. 5,  $a$  та  $b$ . З рис. 5 видно, що найбільші дрейфи алго-

ритмів БІСО спостерігаються по куту  $\phi$ , проте результати моделювання кватерніонного алгоритму на порядок точніші і характер дрейфу має явно нелінійний характер.

### Висновки

Результати моделювання показали адекватність розробленого алгоритму БІСО. Встановлено, що використання як кінематичного рівняння орієнтації кватерніонів дає змогу зменшити

похибку визначення поточних кутів об'єкта на порядок.

Створені програмні засоби дають змогу проводити дослідження як алгоритмів орієнтації Пуассона та кватерніонів, так і методів їх числового інтегрування. Перспективним є дослідження, на основі створених програмних засобів, алгоритмів інтегрування, що синтезовані в інших роботах. Це дасть можливість аналізувати точність і швидкодю широкого спектра алгоритмів БІСО для конкретних систем.

### Список літератури

1. *Savage P.G.* Advances in strapdown sensors // *Advances in Strapdown Inertial Systems. AGARD Lecture Series.* – 1984. – № 133.
2. *Savage P.G.* Blazing gyros – the evolution of strapdown inertial navigation technology for aircraft // *AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics.* – 2013. – 36, № 3. – P. 637–655.
3. *Нестеренко О.И.* Разработка малогабаритных систем ориентации в компании Inertial Labs, USA // Матер. VII Міжнар. конф. “Гіротехнології, навігація, керування рухом і конструювання авіаційно-космічної техніки”, 15 жовтня 2011, Київ. – К.: НТУУ “КПІ”, 2011. – С. 64.
4. *Сапегін О.М., Романов М.О., Бугайов Д.В.* Бесплатформна інерціальна навігаційна система на основі динамічно настроєних гіроскопів // *Наукові вісті НТУУ “КПІ”.* – 2016. – № 6. – С. 94–100.
5. *Сапегин А.Н., Норенко М.В.* Бесплатформенная инерциальная навигационная система на основе прецизионных микромеханических датчиков // *Приборостроение* – 2016: Матер. IX Междунар. науч.-техн. конф. – Мн.: БНТУ, 2016. – С. 259.
6. *Мелешко В.В., Нестеренко О.И.* Бесплатформенные инерциальные навигационные системы. – Кировоград: ПОЛИМЕД-Сервис, 2011. – 171 с.
7. *Лазарев Ю.Ф., Бондар П.М.* Основи теорії чутливих елементів систем орієнтації. – К.: НТУУ “КПІ”, 2011. – 552с.
8. *Лазарев Ю.Ф., Бобровицька Я.Г.* Розроблення і моделювання алгоритмів безплатформової системи орієнтації. – К.: НТУУ “КПІ”, 2011. – 135 с.
9. *Лазарев Ю.Ф., Сандий А.А.* Синтез и исследование точности алгоритмов БИСО на основе уравнения Пуассона // *Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Приладобудування.* – 2016. – Вип. 51. – С. 22–29.
10. *Лазарев Ю.Ф., Сапегин А.Н.* О точности численного интегрирования уравнения ориентации Пуассона методами Рунге–Кутта и Пикара // *Вісник Інженерної академії України.* – 2015. – Вип. 3. – С. 133–139.
11. *Сапегин А.М., Бугайов Д.В.* Программная модель бесплатформенной системы ориентации на базе инерциального измерительного модуля МАХ21105 // *Вісник Інженерної академії України.* – 2016. – Вип. 1. – С. 119–122.
12. *Інтегрування алгоритму орієнтації методом Рунге–Кутта:* Свідоцтво № 65194 України про реєстрацію авторського права на твір. Комп'ютерна програма / Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. (Україна); заявник та власник Сапегін О.М., Бугайов Д.В., Півторак Д.О. – Зареєстровано 05.05.2016 р. у Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

### References

- [1] P.G. Savage, “Advances in strapdown sensors”, *Advances in Strapdown Inertial Systems, AGARD Lecture Series*, no. 133, 1984.
- [2] P.G. Savage, “Blazing gyros – the evolution of strapdown inertial navigation technology for aircraft”, *AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 36, no. 3, pp. 637–655, 2013. doi: 10.2514/1.60211
- [3] O.I. Nesterenko, “Development of small-sized orientation systems in Inertial Labs, USA”, in *Proc. IV Int., Gyrotechnology, Navigation, Motion Control, and Aerospace Engineering Design*, Kyiv, Ukraine, 2011, p. 64 (in Russian).
- [4] A.N. Sapegin et al., “Strapdown inertial navigation system based on dry tuned rotor gyro”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 6, pp. 94–100, 2016 (in Ukrainian). doi: 10.20535/1810-0546.2016.6.81064
- [5] A.N. Sapegin and M.V. Norenko, “Strapdown inertial navigation system based on precision micromechanical sensors”, in *Proc. IX Int. Sci. Techn. Conf. Instrumentmaking – 2016*, Minsk, Belarus, 2016, p. 259 (in Russian).
- [6] V.V. Meleshko and O.I. Nesterenko, *Strapdown Inertial Navigation Systems*. Kirovograd, Ukraine: Polymed, 2011 (in Russian).
- [7] U.F. Lazarev and P.M. Bondar, *Basic Theory of Sensitive Elements of Orientation*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2011 (in Ukrainian).

- [8] U.F. Lazarev and Y.G. Bobrovitska, *Development and Modeling of Strapdown Orientation System Algorithms*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2011 (in Ukrainian).
- [9] U.F. Lazarev and A.A. Sandiy, “Synthesis and research of accuracy strapdown inertial attitude systems based on Poisson equation”, *Vestnik NTUU “KPI”. Ser. Priborostroenie*, no. 51, pp. 22–29 (in Russian).
- [10] U.F. Lazarev and A.N. Sapegin, “The accuracy of numerical integration of the Poisson orientation equation by the Runge–Kutta and Picard methods”, *Visnik Inzhenerei Akademii Ukrainu*, no. 3 pp. 133–139, 2015. (in Russian).
- [11] A.N. Sapegin and D.V. Bugaiov, “Software model of strapdown inertial attitude system based on inertial measurement unit MAX21105”, *Visnik Inzhenerei Akademii Ukrainu*, no. 1, pp. 119–122, 2016 (in Russian).
- [12] A.N. Sapegin *et al.*, “The integration of the orientation algorithm using the method of Runge–Kutta”, Ukraine Certificate of authorship 65194, May 5, 2016 (in Ukrainian).

О.М. Сапегін, М.В. Норенко

#### АЛГОРИТМ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ОРІЄНТАЦІЇ НА ЛАЗЕРНИХ ГІРОСКОПАХ

**Проблематика.** Робота присвячена підвищенню точності безплатформних інерціальних систем за рахунок удосконалення алгоритмічного забезпечення.

**Мета дослідження.** Розробка і аналіз точності алгоритмів безплатформної інерціальної системи орієнтації.

**Методика реалізації.** Складання алгоритмів безплатформної системи орієнтації на основі кінематичного рівняння Пуассона та кватерніонів. Вхідною інформацією для алгоритмів орієнтації є сигнали з реальних лазерних гіроскопів, встановлених у системі. Інтегрування рівнянь орієнтації виконується з використанням методів Рунге–Кутти.

**Результати дослідження.** Визначено похибки системи орієнтації за різного руху основи.

**Висновки.** Дослідження вибраних алгоритмів орієнтації та числового інтегрування показало їх високу точність. Вони цілком можуть застосовуватись при проектуванні прецизійних безплатформних інерціальних систем.

**Ключові слова:** кільцевий лазерний гіроскоп; рівняння Пуассона; кватерніон; математичне моделювання; безплатформна інерціальна навігаційна система.

А.Н. Сапегин, М.В. Норенко

#### АЛГОРИТМ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ НА ЛАЗЕРНЫХ ГИРОСКОПАХ

**Проблематика.** Работа посвящена повышению точности бесплатформенных инерциальных систем за счет улучшения алгоритмического обеспечения.

**Цель исследования.** Разработка и анализ точности алгоритмов бесплатформенной инерциальной системы ориентации.

**Методика реализации.** Составление алгоритмов бесплатформенной системы ориентации на основе кинематического уравнения Пуассона и кватернионов. Входной информацией для алгоритмов ориентации являются сигналы с реальных лазерных гироскопов, установленных в системе. Интегрирование уравнений ориентации выполняется с использованием методов Рунге–Кутты.

**Результаты исследования.** Определены погрешности системы ориентации при различном движении основания.

**Выводы.** Исследование выбранных алгоритмов ориентации и численного интегрирования показало их высокую точность. Они вполне могут применяться при проектировании прецизионных бесплатформенных инерциальных систем.

**Ключевые слова:** кольцевой лазерный гироскоп; уравнение Пуассона; кватернион; математическое моделирование; бесплатформенная инерциальная навигационная система.

Рекомендована Радою  
приладобудівного факультету  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
14 лютого 2017 року