

УДК 53:51 (075.8)

В.П. Лєгеца, І.А. Дичка, Д.В. Лєгеца

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ З РУХЛИВОЮ ОПОРОЮ  
У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ**

We consider the natural oscillations of the string whose left end is fixed and the right one has the ability to move in a vertical plane by a defined law. We should address this issue to construct an adequate mathematical model of the electric wire taking into account longitudinal displacement of one of its ends. The right-hand mobile support is a commuting pendant with electric wire in the form of insulator strings. The purpose of research is to show and justify the boundary conditions occurring during vibration of a string considering the movements of its right pillar and solve the corresponding boundary problem. The technique for solving the boundary value problem lies in the state that the solution of the wave equation should be searched in such a form that its time-average standard deviation derived from the boundary condition should be minimal. Emphasized should be the obtained research results: change of fundamental frequency of basic tone of string vibrations caused by its right pillar movement in vertical plane within the range of parameters change of the considered system can be neglected.

**Вступ**

У практичних задачах динаміки гнучких елементів (мостових вант, тросів, електричних проводів ліній електропередач (ЛЕП), шахтних канатів, стрічок у стрічкопротяжних механізмах, дротів при виготовленні оболонок обертання намоткою тощо) часто виникає необхідність врахування рухливості опор у різних напрямках [1–9]. Це своєю чергою приводить до постановки та дослідження нових задач математичної фізики з границями, що змінюються.

Динамічну поведінку шахтних канатів як дротів змінної довжини з неголономними в'язями детально досліджено в праці [1]. Загальні теоретичні підходи до дослідження вимушених коливань мостових вант для різних кліматичних періодів ґрунтовно висвітлені в [2, 3]. В експериментально-теоретичних працях [4–6] запропоновані деякі нові напрями керування активним демпфіруванням вимушених коливань мостових вант, закріплюючих розтяжок-тросів висотних об'єктів та електричних проводів під час галопування або флатера. Природа явища галопування електричних проводів і тросів детально висвітлена в [7]. Довідникові праці [8, 9] направлені на вирішення проблеми обледеніння електричних проводів і містять результати обробки експериментальних досліджень його впливу на динамічну поведінку ЛЕП під час галопування.

Виникнення коливань з великими амплітудами в зазначених вище об'єктах та їх елементах є неприпустимим явищем, тому найголовніша задача на першому етапі дослідження їх динаміки — аналіз частотних і резонансних влас-

тивостей відповідних систем. Результати такого частотного аналізу мають забезпечити: адекватність математичної моделі реальним коливальним системам (наприклад, у вигляді ЛЕП), зменшення максимальних амплітуд вимушених коливань проводів при галопуванні, підвищення точності розрахунків конструкцій на динамічну міцність і, як кінцевий результат, експлуатаційну надійність технічних об'єктів із рухливими границями.

Відомо [9], що коливання точки підвісу електричного проводу є важливим негативним чинником виникнення і підсилення галопування ЛЕП. З іншого боку, різні конструктивні рішення по жорсткому (нерухомому) закріпленню обох точок підвісу проводу відносно траверс опор ЛЕП призводять до різкого збільшення натягу в перерізі проводу під час галопуючих коливань і, як наслідок, до його обриву. Отже, потрібно знайти такі способи демпфірування вимушених коливань точок підвісу електричного проводу, які б зменшили їх позовжні переміщення до оптимального рівня, але не робили їх нульовими.

Актуальність цього наукового напрямку пояснюється значним зростанням числа аварій на потужних ЛЕП через вплив кліматичних навантажень, які зумовлюють часті обриви електричних проводів та перебої електроенергії в різних країнах світу зі значними фінансовими втратами [9, 10].

У подальшому будемо ототожнювати електричний провід із класичною струною [8, 9] (тобто будемо нехтувати його жорсткістю на згин, а також зміною сили натягу під час коливань).

### Постановка задачі

Мета статті – вивести й обґрунтувати граничні умови, які мають місце під час коливань струни з урахуванням переміщень її правої опори, та оцінити можливу зміну частоти основного тону власних коливань струни в такому випадку.

### Вихідні положення

Для розв'язання зазначеної загальної проблеми зі зменшення рівня вимушених коливань точок підвісу електричного проводу потрібно зробити перший крок, який полягає у дослідженні впливу переміщення однієї з точок підвісу електричного проводу на частоту його власних коливань. У такій постановці (з урахуванням зміни відстані між опорами) ця нелінійна задача розглядається вперше. В ній досліджуються вимушені коливання електричного проводу в прольоті між анкерною та проміжною опорами ЛЕП, які виникають унаслідок галопування або миттєвого скидання льодового нашарування на проводах під час його плавлення. Права рухлива опора моделює маятникову підвіску електричного проводу, яка являє собою гірлянду ізоляторів. Своєю чергою зазначена гірлянда шарнірно прикріплена до траверси ЛЕП з можливістю вільного обертання відносно останньої.

Поперечні коливання струни (електричного проводу) моделюються за допомогою однорідного хвильового рівняння.

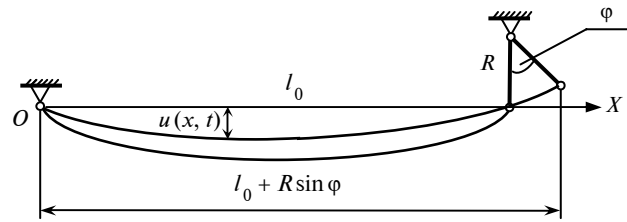
### Обґрунтування граничних умов з урахуванням переміщень правої опори струни

Розглядаються коливання струни, лівий кінець якої є нерухомим, а правий має можливість переміщуватись у вертикальній площині за деяким законом (рисунок). Обґрунтуємо граничні умови, які мають місце під час коливань струни з урахуванням таких переміщень її правої опори.

Очевидно, що переміщення правої границі струни взаємопов'язане з величиною амплітуди  $u(x; t)$  її вертикальних коливань. Наявність такого зв'язку і робить цю задачу нелінійною.

Задачу сформулюємо таким чином: для однорідного хвильового диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$



Розрахункова схема до крайової задачі про коливання струни з рухливим правим кінцем

яке описує власні коливання струни, потрібно знайти розв'язок, який задовольняє такі граничні умови:

$$u(0; t) = 0, \quad (2)$$

$$u(l_0 + R \sin \varphi(t); t) = R(1 - \cos \varphi(t)), \quad (3)$$

$$u'_x(l_0 + R \sin \varphi(t); t) = \operatorname{tg} \varphi(t), \quad (4)$$

де  $l_0$  – відстань між опорами по горизонталі перед початком коливань (до початкового збурення);  $R$  – довжина гірлянди ізоляторів;  $\varphi(t)$  – кут, на який відхиляється гірлянда ізоляторів у процесі коливань;  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ;  $T_0$  – статичний натяг струни;  $\rho$  – погонна маса струни.

Формула (2) вказує на те, що лівий кінець струни є нерухомим. Формула (3) записана з тої умови, що нижній кінець гірлянди разом із правим кінцем струни (електричного проводу) описує коло з радіусом  $R$  навколо точки підвісу гірлянди ізоляторів. Формула (4) встановлює ту умову закріплення, що дотична до правого кінця електричного проводу завжди збігається із дотичною до траєкторії переміщення нижньої точки гірлянди (тобто із дотичною до кола з радіусом  $R$ ). Отже, правий кінець електричного проводу завжди утворює з віссю  $OX$  кут, який дорівнює  $\varphi(t)$ .

Нагадаємо, що досліджуються власні коливання електричного проводу (струни), які виникають, наприклад, при миттєвому скиданні льодового нашарування під час його плавлення.

### Перетворення вихідного рівняння (1) і граничних умов (2)–(4)

Будемо розглядати малі кути  $\varphi(t)$ , тобто  $\operatorname{tg} \varphi \sim \varphi$ ,  $\sin \varphi \sim \varphi$ ,  $\cos \varphi \sim 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ . Тепер умови (3), (4) матимуть такий вигляд:

$$u(l_0 + R\varphi; t) = R \frac{\varphi^2}{2}, \quad (5)$$

$$u'_x(l_0 + R\varphi; t) = \varphi. \quad (6)$$

Розкладемо в ряди Тейлора ліві частини співвідношень (5) і (6) із утриманням членів, які містять другу похідну включно. В результаті отримаємо

$$u(l_0; t) + R\varphi u'_x(l_0; t) + \frac{(R\varphi)^2}{2} u''_{xx}(l_0; t) = R \frac{\varphi^2}{2}, \quad (7)$$

$$u'_x(l_0; t) + R\varphi u''_{xx}(l_0; t) = \varphi. \quad (8)$$

Виразимо другу похідну  $u''_{xx}(l_0; t)$  із (8) та підставимо її в (7). Після перетворень отримаємо

$$u(l_0; t) = -\frac{R\varphi}{2} u'_x(l_0; t), \quad (9)$$

$$u'_x(l_0; t) = \varphi(1 - Ru''_{xx}(l_0; t)). \quad (10)$$

За допомогою виразів (9) і (10) звільнімося від кута  $\varphi(t)$ :

$$u(l_0; t) = \frac{R}{2} \frac{[u'_x(l_0; t)]^2}{[Ru''_{xx}(l_0; t) - 1]}. \quad (11)$$

Введемо в задачу (1), (2), (11) такі безрозмірні змінні:

$$\xi = \frac{x}{l_0}, \quad \tau = \frac{at}{l_0}, \quad u(x; t) = B \cdot V(\xi; \tau),$$

де  $B$  – умовна амплітуда коливань.

У результаті отримаємо таку крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 V(\xi; \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 V(\xi; \tau)}{\partial \xi^2}, \quad (12)$$

$$V(0; \tau) = 0, \quad (13)$$

$$V(1, \tau) = \frac{b}{2} \frac{[V'_\xi(1, \tau)]^2}{[bV''_{\xi\xi}(1, \tau) - 1]}, \quad (14)$$

$$\text{де } b = \frac{BR}{l_0^2}.$$

Очевидно, що якщо права опора є також нерухомою в поздовжньому напрямку, то  $b = 0$ , й постановка задачі (12)–(14) спрощується і зводиться до класичної задачі про коливання струни з нерухомими кінцями (наприклад, [11]).

Отже, параметр  $b$  і є тою характеристикою, яка визначає рівень нелінійності досліджуваної задачі. Зростання параметра  $b$  рівнозначне збільшенню амплітуди коливань електричного дроту або зменшенню відстані між опорами. Крім того, тут слід відзначити, що для електричних проводів ЛЕП, які зустрічаються на практиці, параметр  $b$  змінюється, як правило, у діапазоні  $0 \leq b \leq 0,05$ .

### Розв'язання крайової задачі

Будемо шукати періодичний розв'язок нелінійної задачі у вигляді

$$V(\xi; \tau) = z(\xi) \cos(\omega\tau), \quad (15)$$

де  $z(\xi)$  (із врахуванням диференціального рівняння (12) та умови (13)) матиме вигляд

$$z(\xi) = \sin(\omega\xi). \quad (16)$$

Кутову частоту  $\omega$  будемо знаходити так, щоб розв'язок (15) хвильового рівняння (12) якнайкраще задовольняв би умову (14) у середньоквадратичному вимірі. Підставимо вираз (15) у цю умову. Після перетворень отримаємо

$$\Phi(\xi; \tau; \omega)|_{\xi=1} = 0, \quad (17)$$

де

$$\Phi(\xi; \tau; \omega) = 2z(\xi) + b \cos(\omega\tau)[2z(\xi)z''(\xi) - z'^2(\xi)]. \quad (18)$$

Через те що функція  $\Phi^2(\xi; \tau; \omega)$  є періодичною за умовним часом  $\tau$ , зробимо осереднення її величини за періодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ . На основі виразу (18) складемо інтеграл:

$$J(\xi; \omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi^2(\xi; \tau; \omega) d\tau. \quad (19)$$

Після інтегрування (19) отримаємо

$$J(\xi; \omega) = 4z^2(\xi) + 0,5b^2[2z(\xi)z''(\xi) - z'^2(\xi)]^2. \quad (20)$$

Тепер визначимо кутову частоту  $\omega$  із умови мінімуму виразу (20) при  $\xi = 1$ . Функція  $J(\xi; \omega)$  при  $\xi = 1$  набуває вигляду

$$F(\omega) = J(\xi; \omega)|_{\xi=1} = 4 \sin^2 \omega + 0,5b^2 \omega^4 (\sin^2 \omega + 1)^2. \quad (21)$$

Таблиця. Вплив параметра  $b$  на частоту  $\omega$  власних коливань струни

$b$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$\omega$	3,142	3,141	3,140	3,138	3,136	3,133	3,129	3,125	3,120	3,116	3,111

Необхідною умовою існування екстремуму функції (21) є така умова:  $F'(\omega) = 0$ . Знайдемо відповідну похідну і прирівняємо її до нуля:

$$F'(\omega) = 4 \sin 2\omega + 2b^2\omega^3(1 + \sin^2\omega)^2 + b^2\omega^4(1 + \sin^2\omega)\sin 2\omega = 0. \quad (22)$$

Рівняння (22) відносно  $\omega$  було розв'язане числовими методами в околі точки  $\omega = \pi$ , а отримані результати зведені до таблиці.

Максимальне значення відносної похибки наближеного розв'язку (відношення величини  $J(\xi; \omega)|_{\xi=1}$  до  $J(\xi; \omega)|_{\xi=0,5}$ ) у зазначеному діапазоні для параметра  $b$  не перевищує величини 0,01 (результати тут не наводяться). Оскільки визначена похибка виявилася незначною, то вираз (15) з урахуванням (16) при обчисленій першій частоті  $\omega$  можна з достатнім рівнем точності вважати наближеним розв'язком поставленої задачі.

### Висновки

Аналіз отриманих результатів дає можливість зробити такі висновки:

1. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины: применительно к шахтным подъемам. — К.: Изд-во АН УССР, 1962. — 331 с.
2. Графский И.Ю., Казакевич М.И. Аэродинамика плохобтекаемых тел. — Днепропетровск: ДГУ, 1983. — 116 с.
3. Казакевич М.И. Проблемы стабилизации вант // Металеві конструкції. — 2011. — 17, № 2. — С. 63–64.
4. A. Preumont and Y. Achkire, "Active damping of structures with guy cables", AIAA, J. of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 20, no. 2, pp. 320–326, 1997.
5. Y. Achkire et al., "Active damping and flutter control of cable-stayed bridges", J. of Wind Eng. and Industrial Aerodynamics, vol. 74–76, pp. 913–921, 1998.
6. A. Preumont et al., "Active tendon control of large trusses", AIAA J., vol. 38, no. 3, pp. 493–498, 2000.
7. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания. — М.: Физматгиз, 1960. — 464 с.
8. Бекметьев Р.М., Жакаев А.Ш., Ширинских Н.В. Пляска проводов воздушных линий электропередач. — Алма-Ата: Изд-во "Наука" Казахской ССР, 1979. — 152 с.
9. Крижов Г.П., Удод Т.Є., Гримуд Г.І. Ожеледно-вітрові навантаження, галопування проводів повітряних ліній електропередавання та боротьба з ними: Довідково-метод. посібник. — К.: Мінпаливенерго України, 2010. — 454 с.
10. Нарожний В.Б., Княжевська С.Я., Глей Л.В. Кліматичні навантаження на повітряні лінії електромереж. — К.: Енергопрогрес, 1994. — 212 с.
11. Мартиненко М.А., Легеза В.П., Іванова Ю.І. Математична фізика: Підручник для студентів ВНЗ. — К.: Четверта хвиля, 2009. — 480 с.