УДК 517.581
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.77167

Н.О. Вірченко, О.В. Овчаренко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕЙЛЕРОВОГО ІНТЕГРАЛУ ПЕРШОГО РОДУ

Background. The new generalization of Euler’ integral of the I-kind (beta-functions) is considered, its main properties are investigated. Such distributions have a special place among the special functions due to their widespread use in many areas of applied mathematics.
Objective. The aim of the paper is to study the generalization of the new r-generalized beta-function and its application to the calculation of the new integrals.
Methods. To obtain results the general methods of the theory of special functions have been used.
Results. The article deals with new generalization of Euler’ integral of the I-kind. For the corresponding r-generalized beta functions were obtained important functional relations and differentiation formulas. For a wide application in the theory of integral and differential equations are important theorems on the connection of new beta functions with classical hypergeometric functions, Macdonald’ and Whittaker’ functions.
Conclusions. Considered in the article new generalization of Euler’ integral of the I-kind opens up opportunities for the use of Euler’ integrals in the theory of special functions, in the application of mathematical and physical problems. In the future we plan to use r-generalized beta functions to solve the new problems of the theory of probability, mathematical statistics, the theory of integral equations, etc.
Keywords: generalization of Euler’ integral of the I-kind; *r*-generalized beta function; hypergeometric function; Macdonald’ function; Whittaker’ function.

Вступ

При розв’язанні різноманітних задач математичної фізики, астрофізики, квантової механіки, теорії ймовірностей і математичної статистики, біомедицини тощо виникають спеціальні функції різної природи та складності. Кількість спеціальних функцій за останні десятиріччя різко зросла у зв’язку з широкими потребами практичного застосування теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, із розвитком обчислювальної математики, загальної теорії аналітичних функцій тощо [1–6].

Серед спеціальних функцій бета-функції посідають особливе місце завдяки їх широкому застосуванню як у теорії спеціальних функцій, так і в багатьох розділах прикладної математики [2, 4, 7–9].

Постановка задачі

Мета статті – розглянути нові узагальнення ейлерового інтегралу І-го роду (бета-функції), дослідити їх основні властивості, подати приклади застосування.

Означення узагальненого ейлерового інтегралу І-го роду

Узагальнений ейлерів інтеграл І-го роду (або узагальнену бета-функцію) подамо у вигляді

$$\tilde{B}(x,y;r)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (1)$$

де x, y – довільні комплексні числа, $\mathrm{Re}(r)>0$; $(\tau,\beta)\in R$; $\tau-\beta<1,\ \tau>0,\ \beta>0$; ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ – (τ,β)-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [2]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)=$$

$$=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(a;\tau);\\(c;\beta);\end{matrix}\middle|\, zt^{\tau}\right]dt, \quad (2)$$

де ${}_1\Psi_1[\ldots]$ – узагальнена функція Фокса–Райта [1].

При $c=a,\ r=0$ (1) зводиться до класичної бета-функції $B(x,y)$ [7].

Дослідимо *основні властивості* функції $\tilde{B}(x,y;r)$.

1) Функція $\tilde{B}(x,y;r)$ – *симетрична* щодо параметрів x, y.
Справді при заміні $t\to 1-t$ у (1) матимемо

$$\tilde{B}(x,y;r)=\tilde{B}(y,x;r),\ \mathrm{Re}(r)\geq 0. \quad (3)$$

2) Формули диференціювання щодо r мають вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial r}\{\tilde{B}(x,y;r)\}=$$

$$= -A\int_0^1 t^{x-2}(1-t)^{y-2}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a+\tau; c+\beta; -\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\{\tilde{B}(x,y;r)\} =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n\beta)}\int_0^1 t^{x-n-1}(1-t)^{y-n-1}\times$$

$$\times {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a+n\tau; c+n\beta; -\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \quad (5)$$

де $A = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c+\beta)}$, $\mathrm{Re}(r) > 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

3) **Теорема 1** (*функціональне співвідношення*):

$$\tilde{B}(x, y+1; r) + \tilde{B}(x+1, y; r) = \tilde{B}(x, y; r). \quad (6)$$

Доведення. Ліва частина (6) має вигляд

$$\int_0^1 \{t^{x-1}(1-t)^y + t^x(1-t)^{y-1}\}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t(1-t)}\right)dt,$$

після простих алгебричних перетворень матимемо

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t(1-t)}\right)dt,$$

тобто одержано праву частину (6).

Теорема 2. За умов існування $\tilde{B}(x, y; r)$ справедлива така рівність:

$$x\tilde{B}(x, y+1; r) - y\tilde{B}(x+1, y; r) =$$

$$= r[\tilde{B}(x+1, y-1; r) - \tilde{B}(x-1, y+1; r)] \ (\mathrm{Re}(r) > 0). \quad (7)$$

Теорема 3 (про зв'язок із функцією ${}_2F_1$).

За умов $\mathrm{Re}(r) > 0$, $(\tau, \beta) \subset R$, $\tau > 0$, $\beta > 0$; x, y — довільні комплексні числа справедлива така формула:

$$\tilde{B}(x, y; r) = 2^{1-x-y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{4r}{t}\right)\times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{x-y}{2}, \frac{1+x-y}{2}; \frac{1}{2}; (1-t)\right)dt. \quad (8)$$

Доведення легко здійснюється з (1) за допомогою простих підстановок

$$t \to 2t-1,$$

$$t \to 1-t^2$$

та відповідних перетворень:

$$\tilde{B}(x, y; r) =$$

$$= 2^{2-x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2n}}{(1)_{2n}}\int_0^1 t^{2n}(1-t^2)^{y-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(-\frac{4r}{1-t^2}\right)dt, \quad (9)$$

$$\tilde{B}(x, y; r) =$$

$$= 2^{1-x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2n}}{(1)_{2n}}\int_0^1 t^{y-x}(1-t)^{n-\frac{1}{2}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(-\frac{4r}{t}\right)dt. \quad (10)$$

Знову міняємо порядок сумування та інтегрування у (10), матимемо

$$\tilde{B}(x, y; r) =$$

$$= 2^{1-x-y}\int_0^1 {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{4r}{t}\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-x)_{2n}}{(1)_{2n}}(1-t)^n\right\}t^{y-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t}}. \quad (11)$$

Застосовуємо формулу Лежандра [7], тоді сумування в (11) спрощується і дає гіпергеометричну функцію

$${}_2F_1\left(\frac{y-x}{2}, \frac{1+y-x}{2}; \frac{1}{2}; 1-t\right).$$

Отже, маємо (8).

Теорема 4 (про зв'язок із функцією Макдональда).

Справедлива рівність

$$\tilde{B}(\alpha, -\alpha; r) = 2e^{-2r}\mathrm{K}_\alpha(2r) \ \ (\mathrm{Re}(r) > 0). \quad (12)$$

Доведення. У формулі

$$\tilde{B}(x, y; r) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2r}\int_0^\infty \frac{t^{x-1} + t^{y-1}}{(1+t)^{x+1}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(t+t^{-1}+2))\,dt. \quad (13)$$

покладемо $x = \alpha, y = -\alpha$, тоді одержимо

$$\tilde{B}(\alpha, -\alpha; r) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(t+t^{-1}+2))\,dt. \quad (14)$$

А цей інтеграл можна розглядати як інтегральне перетворення Мелліна функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -r(t+t^{-1}+2))$ щодо α, що і дає (12).

Теорема 5 (про зв'язок із функцією Віттекера).

Справедлива формула

$$\tilde{B}(\alpha, -\alpha; r) = \sqrt{\pi}2^{-\alpha}r^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-2r}W_{-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}}(4r). \quad (15)$$

Наслідок.

$$\tilde{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};r\right) = \pi \operatorname{erf}c(2\sqrt{r}). \qquad (16)$$

Справді, поклавши $\alpha = \frac{1}{2}$ у (15), матимемо (16).

Теорема 6. За умов існування функції $\tilde{B}(x,y;r)$ виконується рівність

$$\tilde{B}(x,y;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}(x+n, y+1; r). \qquad (17)$$

Доведення. Замінюємо в (1) член $(1-t)^{y-1}$ рядом

$$(1-t)^{y-1} = (1-t)^y \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

тоді

$$\tilde{B}(x,y;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{x-1+n}(1-t)^y \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt,$$

звідки маємо (17).

Теорема 7. Справедлива формула

$$\tilde{B}(x,1-y;r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)_n}{n!} \tilde{B}(x+n,1;r). \qquad (18)$$

Доведення. Із (1) маємо

$$\tilde{B}(x,1-y;r) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-y-1} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt,$$

член $(1-t)^{-y}$ замінюємо рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y)_n \frac{t^n}{n!},$$

тоді одержимо

$$\tilde{B}(x,1-y;r) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)_n}{n!} t^{x+n-1} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt.$$

Виконавши перестановку порядку інтегрування та сумування, матимемо (18).

Теорема 8. Справедливі такі інтегральні зображення функції $\tilde{B}(x,y;r)$:

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$= \int_0^{\infty} t^{x-1}(1+t)^{-x-y} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(t+t^{-1}+2))dt; \qquad (19)$$

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(t+t^{-1}+2))dt; \qquad (20)$$

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$= 2^{1-x-y}\int_0^1 [(1-t)^{x-1}(1+t)^{y-1} + (1-t)^{y-1}(1+t)^{x-1}] \times$$

$$\times \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{4r}{1-t^2}\right)dt \qquad (21)$$

$$(\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0);$$

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$= (1+\lambda)^x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1+\lambda t)^{-x-y} \times$$

$$\times \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r(1+\lambda t)^2}{\lambda t}\right)dt \qquad (22)$$

$$(r > -1, \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0);$$

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$= 2^{2-x-y}\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}}{(1+t^2)^{x+y}} \times$$

$$\times \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{4r(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\right)dt \qquad (23)$$

$$(\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0, \tau > 0);$$

$$\tilde{B}(x,y;r) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2y-1}(\sin\varphi)^{2x-1} \times$$

$$\times \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r\sec^2\varphi \operatorname{cos}ec^2\varphi)\,d\varphi; \qquad (24)$$

$$\tilde{B}(x,y;r) =$$

$$2^{1-x-y}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp((x-y)t)}{(cht)^{x+y}} \, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-4rch^2 t)\,dt. \qquad (25)$$

Формули (19)–(25) випливають із означення узагальненої бета-функції (1) за допомогою нескладних підстановок. Наприклад, за допомогою підстановок

$$t = \frac{\xi}{1+\xi}, \; t = \frac{(1+\lambda)\nu}{1-\nu}, \; t = \sin^2\varphi$$

отримаємо відповідно формули (19), (22), (24).

Подамо *приклади застосування* функції $\tilde{B}(x,y;r)$ до обчислення інтегралів, відсутніх у науковій та довідковій літературі.

Наприклад, із (21) при $c=a, x=y=2$ одержимо:

$$\int_0^1 (1-t^2)\exp\left(-\frac{4r}{1-t^2}\right)dt = \frac{1}{16}\tilde{B}(2,2;r); \qquad (26)$$

із (20) при $c=a,\ x=y=1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \exp\left(-\frac{4r}{\sin^2 2t}\right)dt = \tilde{B}(1,1;r); \qquad (27)$$

із (23) при $c=a,\ x=y=1$:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\exp\left(-\frac{4r(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}\right)dt = \tilde{B}(1,1;r). \qquad (28)$$

Примітка. Узагальнені неповні бета-функції легко запровадити за аналогією із [7]. Наприклад,

$$\tilde{B}^x(l,m;r) = \int_0^x t^{l-1}(1-t)^{m-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt \qquad (29)$$

$$(\mathrm{Re}(l)>0; \mathrm{Re}(m)>0; \mathrm{Re}(r)>0; 0\le x<1).$$

Зауважимо, що для функції $\tilde{B}^x(l,m;r)$ справедливі

1) формули відображення:

$$\tilde{B}^x(l,m;r) = \tilde{B}(l,m;r) - \tilde{B}^{1-x}(m,l;r); \qquad (30)$$

2) зображення рядом:

$$\tilde{B}^x(l,-l-n;r) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\tilde{B}^x(l+j,-l-j;r) \qquad (31)$$

$$(n=0,1,2,\ldots).$$

Висновки

У статті запроваджено узагальнені ейлерові інтеграли I-го роду (r-узагальнені бета-функції), доведено їх важливі властивості, зокрема симетричність відносно параметрів x та y, отримано формули диференціювання щодо параметра r, функціональні співвідношення. Для подальшого широкого застосування при розв'язанні задач прикладної математики важливими є доведені теореми про зв'язок узагальнених бета-функцій із класичною гіпергеометричною функцією, функцією Макдональда та функцією Віттекера.

Розглянуті в статті нові узагальнені ейлерові інтеграли I-го роду відкривають ширші можливості для використання ейлерових інтегралів і у теорії спеціальних функцій, у прикладних математичних, фізичних задачах.

Результати статті — нові, вагомі, перспективні, тому планується застосувати r-узагальнені бета-функції до розв'язання задач теорії ймовірностей та математичної статистики, до теорії інтегральних рівнянь, біомедицини тощо.

Список літератури

1. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall/CRC, 2004. — 390 p.
2. *Вірченко Н.* Узагальнені гіпергеометричні функції. – К.: НТУУ "КПІ", 2016. – 480 с.
3. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
4. *Barnard R.W.* On application of hypergeometric functions // J. Comput. Appl. Math., 1999. – **105**, № 1-2. – P. 1—8.
5. *Galue L.* Results involving generalized hypergeometric functions // Math. Balkanica, New Ser. – 2008. – **22**, № 1-2. – P. 83—100.
6. *Yakubovich S.* Index transforms associated with generalized hypergeometric functions // Math. Methods Appl. Sci. – 2004. – **27**. – P. 35—46.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
8. *Miller A.R., Moskowitz I.S.* On certain generalized incomplete gamma functions // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – **91**. – P. 179—190.
9. *Nakhi Y.B., Kalla S.L.* A generalization on beta-type distribution with ω-Apell function // Integral Transforms Spec. Funct. – 2003. – **14**, № 4. – P. 321—332.

References

1. A.A. Kilbas and M. Saigo, *H-Transforms*. London, GB: Chapman and Hall/CRC, 2004.
2. N. Virchenko, *Generalized Hypergeometric Functions*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2016 (in Ukrainian).
3. A.F. Verlan and V.S. Sizikov, *Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs*. Kyiv, USSR: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).

4. R.W. Barnard, "On application of hypergeometric functions", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 105, no. 1-2, pp. 1–8, 1999.
5. L. Galue, "Results involving generalized hypergeometric functions", *Math. Balkanica, New Ser.*, vol. 22, no. 1-2, pp. 83–100, 2008.
6. S. Yakubovich, "Index transforms associated with generalized hypergeometric functions", *Math. Methods Appl. Sci.*, no. 27, pp. 35–46, 2004.
7. G. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. Moscow, USSR: Nauka, 1965 (in Russian).
8. A.R. Miller and I.S. Moskowitz, "On certain generalized incomplete gamma functions", *J. Comput. Appl. Math.*, no. 91, pp. 179–190, 1998.
9. Y.B. Nakhi. and S.L. Kalla, "A generalization on beta-type distribution with ω-Apell function", *Integral Transforms Spec. Funct.*, no. 14, pp. 321–332, 2003.

Н.О. Вірченко, О.В. Овчаренко

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЕЙЛЕРОВОГО ІНТЕГРАЛУ ПЕРШОГО РОДУ

Проблематика. У статті запроваджено нове узагальнення ейлерового інтегралу І-го роду (бета-функції), досліджено їх основні властивості. Такі узагальнені функції посідають особливе місце серед спеціальних функцій завдяки їх широкому застосуванню в численних розділах прикладної математики.

Мета дослідження. Вивчення нового узагальнення бета-функції та його застосування до обчислення нових інтегралів.

Методика реалізації. Для отримання результатів було використано загальні методи теорії спеціальних функцій.

Результати дослідження. Запроваджено нове узагальнення ейлерового інтегралу І-го роду. Для відповідних *r*-узагальнених бета-функцій було отримано важливі функціональні співвідношення та формули диференціювання. Для широкого застосування в теорії інтегральних і диференціальних рівнянь є суттєвими теореми про зв'язок нових бета-функцій із класичними гіпергеометричними функціями, функціями Макдональда та Віттекера.

Висновки. Розглянуте у статті нове узагальнення ейлерового інтегралу І-го роду відкриває широкі можливості для використання ейлерових інтегралів у теорії спеціальних функцій, у прикладних математичних і фізичних задачах. Планується застосувати *r*-узагальнені бета-функції до розв'язання нових задач теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії інтегральних рівнянь тощо.

Ключові слова: узагальнення ейлерового інтегралу І-го роду; *r*-узагальнені бета-функції; гіпергеометрична функція; функція Макдональда; функція Віттекера.

Н.А. Вирченко, Е.В. Овчаренко

ОБОБЩЕНИЕ ЭЙЛЕРОВОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРВОГО РОДА

Проблематика. В статье введено новое обобщение эйлерового интеграла І-го рода (бета-функции), исследованы их основные свойства. Такие обобщенные функции занимают особое место среди специальных функций благодаря их широкому применению в многочисленных разделах прикладной математики.

Цель исследования. Изучение нового обобщения бета-функции и его применение к вычислению новых интегралов.

Методика реализации. Для получения результатов были использованы общие методы теории специальных функций.

Результаты исследования. Введено новое обобщение ейлеревого интеграла І-го рода. Для соответствующих *r*-обобщенных бета-функций были получены важные функциональные соотношения и формулы дифференцирования. Для широкого применения в теории интегральных и дифференциальных уравнений являются существенными теоремы о связи новых бета-функций с классическими гипергеометрическими функциями, функциями Макдональда и Уиттэкера.

Выводы. Рассмотренное в статье новое обобщение эйлерового интеграла І-го рода открывает широкие возможности для использования эйлеровых интегралов в теории специальных функций, в прикладных математических и физических задачах. Планируется применить *r*-обобщенные бета-функции к решению новых задач теории вероятностей, математической статистики, теории интегральных уравнений и др.

Ключевые слова: обобщение эйлерового интеграла І-го рода; *r*-обобщенные бета-функции; гипергеометрическая функция; функция Макдональда; функция Уиттэкера.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 03 червня 2016 року