УДК 517.958:512.816
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.77034

В.І. Стогній[1], І.М. Копась[1], С.С. Коваленко[2]
[1]Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, Київ, Україна
[2]CoreValue Services, Полтава, Україна

СИМЕТРІЇ ЛІ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КРАМЕРСА

Background. The group-theoretical analysis of fundamental solutions of the one-dimensional linear Kramers equation was carried out in the article.
Objective. The aim of the paper is to find the algebra of invariance of fundamental solutions of the equation under study using the Aksenov–Berest approach, and construct a fundamental solution of the one in the explicit form taking into account the algebra of Lie symmetries to be found.
Methods. The group-theoretical methods of analysis of partial differential equations are used. In particular, the Aksenov–Berest method of constructing in explicit form of fundamental solutions of linear partial differential equations is applied.
Results. The Lie algebra of non-trivial symmetries of the one-dimensional linear Kramers equation under consider was found. The fundamental solution in the explicit form of the equation was constructed. The effectiveness of using of symmetry methods in investigating of fundamental solutions of linear Kolmogorov–Fokker–Planck equations was shown.
Conclusions. Using the Aksenov–Berest approach, the algebra of invariance of fundamental solutions of one one-dimensional linear Kramers equation was found. The operators of the algebra were used in the process of constructing of invariant fundamental solutions of the equation. It was shown that the fundamental solution found early by S. Chandrasekhar without using the methods of symmetry analysis of differential equations is the weak invariant fundamental solution.
Keywords: linear Kramers equation; fundamental solution; Lie symmetries.

Вступ

Добре відомо, що фундаментальні розв’язки лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) зазвичай є інваріантними відносно перетворень, які допускаються вихідним рівнянням [1]. Зокрема, таку властивість мають фундаментальні розв’язки класичних рівнянь математичної фізики – рівняння Лапласа, рівняння теплопровідності, хвильового рівняння тощо (див., наприклад, [2]). А це означає, що якщо лінійне ДРЧП має нетривіальні симетрійні властивості, то для побудови його фундаментального розв’язку можна використовувати теоретико-групові методи.

Об’єктом дослідження цієї роботи є лінійне рівняння Крамерса

$$u_t = u_{yy} - yu_x + (\omega^2 x + y)u_y + u, \qquad (1)$$

де $u = u(t,\ x,\ y); u_t = \frac{\partial u}{\partial t}; u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; u_y = \frac{\partial u}{\partial y}; u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; ω – деяка дійсна стала, яка задовольняє умову $\omega^2 < \frac{1}{4}$.

Рівняння (1) є частинним випадком рівняння Крамерса [3]:

$$u_t = u_{yy} - (yu)_x + ((V'(x) + y)u)_y, \qquad (2)$$

яке описує рух частинки у флуктуючому середовищі із зовнішнім потенціалом $V(x)$, зміна якого створює силу, що діє на частинку.

Дослідження рівняння (2) методами групового аналізу диференціальних рівнянь було розпочато у статті [4], де для вільного рівняння Крамерса, тобто у випадку $V'(x) = 0$, було знайдено максимальну алгебру інваріантності, оператори якої були застосовані для побудови точних інваріантних розв’язків цього рівняння в іншій статті [5]. Групова класифікація за функціональним параметром $V'(x)$ рівнянь (2) була проведена пізніше (див., наприклад, [6]).

Постановка задачі

Метою роботи є: 1) застосовуючи метод Аксьонова–Береста, знайти алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків рівняння (1); 2) побудувати фундаментальний розв'язок рівняння (1) у явному вигляді, використовуючи знайдену алгебру симетрій.

Симетрії фундаментальних розв'язків вільного рівняння Крамерса

Одним із застосувань симетрійних властивостей лінійних ДРЧП є побудова нетривіальних параметричних сімей фундаментальних розв'язків таких рівнянь, які є інваріантними розв'язками [1–2].

***Означення* 1.** Фундаментальним розв'язком рівняння (1) у точці $M(0;0;0)$ називають узагальнену функцію $u = u(t, x, y)$, яка задовольняє рівняння

$$u_t - u_{yy} + yu_x - \omega^2 x u_y - yu_y - u = \delta(t,\ x,\ y), \quad (3)$$

де δ – функція Дірака.

Конструктивний метод (метод Аксьонова–Береста) знаходження симетрій лінійних неоднорідних ДРЧП із δ-функцією у правій частині був запропонований у статті [7] (див. також [2]), у якій було наведено й алгоритм побудови інваріантних фундаментальних розв'язків.

Для побудови фундаментального розв'язку за цим методом знайдемо алгебру інваріантності рівняння (3), яка буде також підалгеброю максимальної алгебри інваріантності рівняння (1).

Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1) була знайдена у статті [6] і генерується такими інфінітезимальними операторами:

$$X_i = e^{\mu_i t}(\partial_x + \mu_i \partial_y);$$

$$X_{i+2} = e^{-\mu_i t}(\partial_x - \mu_i \partial_y + (\mu_i y - \omega^2 x)u\partial_u);$$

$$X_5 = \partial_t;\ X_6 = u\partial_u;\ X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u,$$

де $\mu_i (i = 1, 2)$ – корені рівняння $\mu^2 + \mu + \omega^2 = 0$; $\beta(t, x, y)$ – довільний гладкий розв'язок рівняння (1).

Очевидно, що оператори $X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u$ є також операторами симетрії рівняння (3), а тому надалі ці оператори не розглядатимемо.

Випишемо загальний вигляд оператора нетривіальної ліївської симетрії рівняння (1):

$$X = \sum_{i=1}^{6} a_i X_i,$$

або в розгорнутому вигляді:

$$X = a_5\partial_t + (a_1 e^{\mu_1 t} + a_2 e^{\mu_2 t} +$$

$$+ a_3 e^{-\mu_1 t} + a_4 e^{-\mu_2 t})\partial_x + (a_1\mu_1 e^{\mu_1 t} +$$

$$+ a_2\mu_2 e^{\mu_2 t} - a_3\mu_1 e^{-\mu_1 t} - a_4\mu_2 e^{-\mu_2 t})\partial_y +$$

$$+ (a_3(\mu_1 y - \omega^2 x)e^{-\mu_1 t} +$$

$$+ a_4(\mu_2 y - \omega^2 x)e^{-\mu_2 t} + a_6)u\partial_u, \quad (4)$$

де $a_i (i = 1, \ldots, 6)$ – довільні дійсні сталі.

Оскільки інфінітезимальний оператор (4) є оператором симетрії рівняння (3), то існує така дійсна функція $\lambda(t,\ x,\ y)$, яка задовольняє тотожність [2]

$$X^{(2)}(Lu) = \lambda(t, x, y)Lu,$$

де $Lu \equiv u_t - u_{yy} + yu_x - \omega^2 x u_y - yu_y - u$; $X^{(2)}$ – друге продовження оператора симетрії (4). З цієї умови випливає, що оператору симетрії (4) відповідає функція

$$\lambda(t,\ x,\ y) = a_3(\mu_1 y - \omega^2 x)e^{-\mu_1 t} +$$

$$+ a_4(\mu_2 y - \omega^2 x)e^{-\mu_2 t} + a_6.$$

Алгебра Лі операторів симетрії рівняння (3) є підалгеброю алгебри Лі операторів симетрії рівняння (1), коли координати оператора (4) є такими:

$$\xi^0(t,\ x,\ y) = a_5;\ \xi^1(t,\ x,\ y) =$$

$$= a_1 e^{\mu_1 t} + a_2 e^{\mu_2 t} + a_3 e^{-\mu_1 t} + a_4 e^{-\mu_2 t};$$

$$\xi^2(t,\ x,\ y) = a_1\mu_1 e^{\mu_1 t} +$$

$$+ a_2\mu_2 e^{\mu_2 t} - a_3\mu_1 e^{-\mu_1 t} - a_4\mu_2 e^{-\mu_2 t},$$

і задовольняють такі умови:

$$\xi^0(M) = 0;\ \xi^1(M) = 0;\ \xi^2(M) = 0;$$

$$\lambda(M) + \xi^0_t(M) + \xi^1_x(M) + \xi^2_y(M) = 0.$$

З цих умов знаходимо

$$a_5 = a_6 = 0;$$

$$a_3 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(a_1 - 2\mu_2 a_2);$$

$$a_4 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}(2\mu_1 a_1 - a_2).$$

Замінивши в операторі (4) сталі $a_1, ..., a_6$ знайденими виразами та розщепивши за незалежними сталими a_1 і a_2, отримуємо таку теорему.

Теорема. Рівняння (3) допускає алгебру Лі операторів симетрії з таким базисом скінченновимірної частини:

$$Y_1 = [(\mu_1 - \mu_2)e^{\mu_1 t} - e^{-\mu_1 t} - 2\mu_1 e^{-\mu_2 t}]\partial_x +$$
$$+ [(\mu_1^2 - \omega^2)e^{\mu_1 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t} + 2\omega^2 e^{-\mu_2 t}]\partial_y +$$
$$+ [(\omega^2 e^{-\mu_1 t} + 2\mu_1\omega^2 e^{-\mu_2 t})x +$$
$$+ (-\mu_1 e^{-\mu_1 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_2 t})y]u\partial_u;$$
$$Y_2 = [(\mu_1 - \mu_2)e^{\mu_2 t} + 2\mu_2 e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t}]\partial_x +$$
$$+ [(\omega^2 - \mu_2^2)e^{\mu_2 t} - 2\omega^2 e^{-\mu_1 t} - \mu_2 e^{-\mu_2 t}]\partial_y +$$
$$+ [(-2\mu_2\omega^2 e^{-\mu_1 t} - \omega^2 e^{-\mu_2 t})x +$$
$$+ (2\omega^2 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t})y]u\partial_u.$$

Фундаментальний розв'язок рівняння (1) в явному вигляді в елементарних функціях було знайдено С. Чандрасекаром у [8]:

$$u = \frac{\theta(t)e^t}{2\pi\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{A(t)x^2 + B(t)xy + C(t)y^2}{2\Delta}\right\},$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда; функції $A(t)$; $B(t)$; $C(t)$ і Δ відповідно становлять

$$A(t) = 4\omega^2 e^t + (1 - 4\omega^2)e^{2t} + \mu_1 e^{-2\mu_2 t} + \mu_2 e^{-2\mu_1 t};$$

$$B(t) = 4e^t - 2e^{-2\mu_2 t} - 2e^{-2\mu_1 t};$$

$$C(t) = 4e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2}e^{2t} + \frac{1}{\mu_1}e^{-2\mu_2 t} + \frac{1}{\mu_2}e^{-2\mu_1 t};$$

$$\Delta = 8e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2}(e^{2t} + 1) - \frac{1}{\omega^2}(e^{-2\mu_1 t} + e^{-2\mu_2 t}).$$

Легко переконатися, що цей фундаментальний розв'язок є інваріантним відносно операторів Y_1 і Y_2 з алгебри інваріантності рівняння (3). Це означає, що його можна знайти за алгоритмом, запропонованим у статті [9], як слабкий інваріантний розв'язок.

Класичні інваріанти, що відповідають цим операторам, знаходять із такої системи рівнянь:

$$Y_1 I = 0; Y_2 I = 0,$$

де $I = I(t, x, y, u)$ і рівняння розв'язують класичним способом. Для спрощення запису перепишемо оператори Y_1 та Y_2 у вигляді

$$Y_1 = a_1(t)\partial_x + b_1(t)\partial_y + (m_1(t)x + n_1(t)y)u\partial_u;$$

$$Y_2 = a_2(t)\partial_x + b_2(t)\partial_y + (m_2(t)x + n_2(t)y)u\partial_u.$$

Після відповідних обчислень отримуємо

$$I_1 = u\exp\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2(a_1 b_2 - b_1 a_2)}[(b_1 m_2 - m_1 b_2)x^2 + \\ + 2(b_1 n_2 - n_1 b_2)xy + (n_1 a_2 - a_1 n_2)y^2]\end{matrix}\right\};$$

$$I_2 = t,$$

і координати операторів Y_1 та Y_2 задовольняють умову

$$a_1 m_2 - m_1 a_2 = n_1 b_2 - b_1 n_2.$$

Класичний інваріантний розв'язок визначається із рівності $I_1 = \varphi(I_2)$, з якої одержуємо підстановку (анзац)

$$u = \exp\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2(a_1 b_2 - b_1 a_2)}[(b_1 m_2 - m_1 b_2)x^2 + \\ + 2(b_1 n_2 - n_1 b_2)xy + (n_1 a_2 - a_1 n_2)y^2]\end{matrix}\right\}\varphi(t), \quad (5)$$

яка зводить досліджуване рівняння (1) до такого звичайного диференціального рівняння:

$$\varphi'(t) - \left(\frac{a_1 n_2 - n_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} + 1\right)\varphi(t) = 0.$$

Підставивши замість a_i, b_i, n_i $(i = 1, 2)$ їх вирази, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними, загальним розв'язком якого буде функція

$$\varphi(t) = C\frac{e^t}{\sqrt{\Delta}}, \quad (6)$$

де $\Delta = 8e^t + \frac{1 - 4\omega^2}{\omega^2}(e^{2t} + 1) - \frac{1}{\omega^2}(e^{-2\mu_1 t} + e^{-2\mu_2 t})$, а C — довільна стала.

Враховуючи (6), з (5) отримаємо класичний інваріантний розв'язок, що відповідає операторам Y_1 та Y_2:

$$u = C\frac{e^t}{\sqrt{\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2(a_1b_2-b_1a_2)}[(b_1m_2-m_1b_2)x^2+\\&+2(b_1n_2-n_1b_2)xy+(n_1a_2-a_1n_2)y^2]\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Підстановкою (7) у рівняння (3) неважко переконатися, що $Lu(t,x,y)=0$, а тому розв'язок (7) не дає фундаментального розв'язку цього рівняння. Для побудови слабкого інваріантного розв'язку застосуємо твердження 1 з роботи [9], а саме слабкі інваріантні розв'язки будемо шукати у вигляді

$$u = \frac{h(t,\ x,\ y)e^t}{\sqrt{\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2(a_1b_2-b_1a_2)}[(b_1m_2-m_1b_2)x^2+\\&+2(b_1n_2-n_1b_2)xy+(n_1a_2-a_1n_2)y^2]\end{aligned}\right\},$$

де $h(t,\ x,\ y)\in \mathrm{D}'(\mathrm{R}^3)$.

Рівняння $Y_1u=0$ та $Y_2u=0$ дають відповідно

$$a_1(t)h_x + b_1(t)h_y = 0,$$

$$a_2(t)h_x + b_2(t)h_y = 0.$$

Легко показати, що узагальнена функція

$$h(t,\ x,\ y) = C_1\theta(t) + C_0,$$

де C_0, C_1 — довільні дійсні сталі, є розв'язком цих рівнянь. Звідси отримуємо

$$u = \frac{(C_1\theta(t)+C_0)e^t}{\sqrt{\Delta}}\times$$

$$\times\exp\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2(a_1b_2-b_1a_2)}[(b_1m_2-m_1b_2)x^2+\\&+2(b_1n_2-n_1b_2)xy+(n_1a_2-a_1n_2)y^2]\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

У формулі (8) можна покласти $C_0=0$, оскільки фундаментальний розв'язок рівняння (3) визначається з точністю до додавання довільного розв'язку відповідного однорідного рівняння (1). Підстановкою (8) у рівняння (3) знаходимо значення сталої $C_1 = 1/2\pi$. Отже, фундаментальний розв'язок лінійного рівняння Крамерса (1) ми знайшли як слабкий інваріантний розв'язок відносно двовимірної алгебри $\langle Y_1, Y_2\rangle$ точкових симетрій рівняння (3).

Висновки

У цій статті за методом Аксьонова—Береста знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків рівняння (1), оператори якої були використані для побудови інваріантних фундаментальних розв'язків цього рівняння. Показано, що фундаментальний розв'язок рівняння (1), який був знайдений С. Чандрасекаром без застосування методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, є інваріантним фундаментальним розв'язком. Проведені нами міркування дають теоретико-групові підґрунтя цього розв'язку, а також ще раз підтверджують спостереження, що фундаментальні розв'язки лінійних ДРЧП слід шукати серед їх інваріантних розв'язків.

Перспективним напрямом подальших досліджень є застосування використаного підходу для дослідження симетрійних властивостей фундаментальних розв'язків інших (як одновимірних, так і багатовимірних) лінійних рівнянь Колмогорова—Фоккера—Планка.

Список літератури

1. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, вып. 4 (286). – С. 83–144.
2. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. – 1995. – **342**, № 2. – С. 151–153.
3. *Gardiner C.* Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 465 p.

4. *Shtelen W.M., Stogny V.I.* Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations // J. Rhys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**, № 13. – P. L539–L543. doi:10.1088/0305-4470/22/13/002
5. *Saied E.A.* On the silimarity solutions for the free Kramers equation. I // Appl. Math. Comp. – 1996. – **74**, № 1. – P. 59–63. doi:10.1016/0096-3003(95)00088-7
6. *Spichak S.V., Stogniy V.I.* Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation // J. Math. Phys. – 1998. – **39**, № 6. – P. 3505–3510. doi:10.1063/1.532447
7. *Берест Ю.Ю.* Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 11. – С. 1958–1970.
8. *Chandrasekhar S.* Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Mod. Phys. – 1943. – **15**, № 1. – P. 1–89. doi:10.1103/RevModPhys.15.1
9. *Берест Ю.Ю.* Слабые инварианты локальных групп преобразований // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № 10. – С. 1796–1803.

References

1. N.Kh. Ibragimov, “Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie)”, *Uspehi Matematicheskih Nauk,* vol. 47, no. 4 (286), pp. 83–144, 1992 (in Russian).
2. A.V. Aksenov, “Symmetries of linear partial differential equations and fundamental solutions”, *Doklady Akademii Nauk,* vol. 342, no. 2, pp. 151–153, 1995 (in Russian).
3. C. Gardiner, *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences.* Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009.
4. W.M. Shtelen and V.I. Stogny, “Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations”, *J. Rhys. A: Math. Gen.*, vol. 22, no. 13, pp. L539–L543, 1989. doi:10.1088/0305-4470/22/13/002
5. E.A. Saied, “On the silimarity solutions for the free Kramers equation. I”, *Appl. Math. Comp.*, vol. 74, no. 1, pp. 59–63, 1996. doi:10.1016/0096-3003(95)00088-7
6. S.V. Spichak and V.I. Stogniy, “Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation”, *J. Math. Phys.,* vol. 39, no. 6, pp. 3505–3510, 1998. doi:10.1063/1.532447
7. Yu.Yu. Berest, “Group analysis of linear differential equations in distributions and the construction of fundamental solutions”, *Differencial'nye Uravnenija*, vol. 29, no. 11, pp. 1598–1970, 1993 (in Russian).
8. S. Chandrasekhar, “Stochastic problems in physics and astronomy”, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 15, no. 1, pp. 1–89, 1943. doi:10.1103/RevModPhys.15.1
9. Yu.Yu. Berest, “Weak invariants of local transformation groups”, *Differencial'nye Uravnenija*, vol. 29, no. 10, pp. 1796–1803, 1993 (in Russian).

В.І. Стогній, І.М. Копась, С.С. Коваленко

СИМЕТРІЇ ЛІ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КРАМЕРСА

Проблематика. У статті проведено теоретико-груповий аналіз фундаментальних розв’язків одновимірного лінійного рівняння Крамерса.

Мета дослідження. Застосовуючи метод Аксьонова–Береста, знайти алгебру інваріантності фундаментальних розв’язків досліджуваного рівняння, а також побудувати фундаментальний розв’язок рівняння у явному вигляді, використовуючи знайдену алгебру симетрій.

Методика реалізації. Застосовуються методи теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема метод Аксьонова–Береста побудови у явному вигляді фундаментальних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь.

Результати дослідження. Знайдено алгебру Лі нетривіальних симетрій досліджуваного одновимірного лінійного рівняння Крамерса. Побудовано у явному вигляді в елементарних функціях фундаментальний розв’язок цього рівняння. Показано ефективність застосування симетрійних методів для дослідження фундаментальних розв’язків лінійних рівнянь Колмогорова–Фоккера–Планка.

Висновки. За методом Аксьонова–Береста знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв’язків одного одновимірного лінійного рівняння Крамерса, оператори якої були використані для побудови інваріантних фундаментальних розв’язків цього рівняння. Показано, що фундаментальний розв’язок цього рівняння, який був знайдений С. Чандрасекаром без застосування методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, є інваріантним фундаментальним розв’язком.

Ключові слова: лінійне рівняння Крамерса; фундаментальний розв’язок; симетрії Лі.

В.И. Стогний, И.Н. Копась, С.С. Коваленко

СИММЕТРИИ ЛИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КРАМЕРСА

Проблематика. В статье проведен теоретико-групповой анализ фундаментальных решений одномерного линейного уравнения Крамерса.

Цель исследования. Используя метод Аксенова–Береста, найти алгебру инвариантности фундаментальных решений исследуемого уравнения, а также построить фундаментальное решение уравнения в явном виде, используя найденную алгебру симметрий.

Методика реализации. Используются методы теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными, в частности метод Аксенова–Береста построения в явном виде фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений.

Результаты исследования. Найдена алгебра Ли нетривиальных симметрий исследуемого одномерного линейного уравнения Крамерса. Построено в явном виде в элементарных функциях фундаментальное решение этого уравнения. Показана эффективность использования симметрийных методов для исследования фундаментальных решений линейных уравнений Колмогорова–Фоккера–Планка.

Выводы. С использованием метода Аксенова–Береста найдена алгебра инвариантности фундаментальных решений одного одномерного линейного уравнения Крамерса, операторы которой были использованы для построения инвариантных фундаментальных решений этого уравнения. Показано, что фундаментальное решение этого уравнения, найденное ранее С. Чандрасекаром без использования методов симметрийного анализа дифференциальных уравнений, является инвариантным фундаментальным решением.

Ключевые слова: линейное уравнение Крамерса; фундаментальное решение; симметрии Ли.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
15 червня 2016 року