УДК 517.977.55

М.М. Копець
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Background. For controlled object which behavior is described by the system of two linear differential equations and with criteria of quality in the form of quadratic functional the optimal control problem is considered. In contrast to the general used methods for investigation of this problem (Pontryagin’s maximum principle, Bellman’s method of dynamic programming) the Lagrange’s multipliers method is proposed by author. Such approach provided the possibility to more effectively obtain the solution of the investigated optimization problem in comparison with the above-mentioned methods.
Objective. The purpose of the research is to obtain the formulas for calculation of optimal control and minimal value of the cost functional.
Methods. In the paper the methods of calculus of variations were used.
Results. In the paper the necessary optimality conditions were obtained and the uniqueness of optimal control was proved. On the basis of these conditions the system of differential Riccati equations is deduced.
Conclusions. The solution of this system permits to write the closed formula for optimal control and formula for calculation of minimal value of the performance functional. The results obtained in the paper may be used for investigation of the process of landing of airplane.

Keywords: quadratic functional; method of Lagrange multipliers; necessary conditions of optimality; optimal control; system of differential Riccati equations.

Вступ

Задача оптимального керування – це задача проектування системи, що забезпечує екстремум заданого критерію якості для певного об’єкта або процесу керування за рахунок відповідного вибору закону керування. Таке керування називається оптимальним керуванням. Для знаходження розв’язку задачі оптимального керування потрібно побудувати математичну модель керованого об’єкта або процесу, що описує його поведінку залежно від часу під впливом керувань. Математична модель для задачі оптимального керування, як правило, включає в себе систему диференціальних рівнянь, що описують стан керованого об’єкта та формулювання мети керування у вигляді критерію якості керування. Досить типовим є випадок, коли поведінка об’єкта описується системою лінійних диференціальних рівнянь, а якість керованого процесу оцінюється з допомогою квадратичного функціонала. Така задача називається лінійно-квадратичною задачею оптимального керування. Якщо розглядається система звичайних диференціальних рівнянь, то це випадок об’єкта із зосередженими параметрами. Коли маємо справу із диференціальними рівняннями із частинними похідними, то це є об’єкт із розподіленими параметрами. Дослідженню лінійно-квадратичної задачі оптимального керування присвячена значна кількість наукових статей і монографій. Як приклад, можна згадати монографії [1–3]. Для знаходження розв’язку цієї задачі використовується або принцип максимуму Понтрягіна, або метод динамічного програмування Беллмана.

Постановка задачі

Мета роботи – отримати формули для обчислення оптимального керування та мінімального значення функціонала якості з допомогою методу множників Лагранжа.

Вихідні положення

Поведінка керованого об’єкта описується системою двох лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = u(t), \end{cases} \tag{1}$$

де функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ характеризують траєкторію керованого об’єкта, $u(t)$ – керування. Вважаємо, що керування $u(t)$ належить до класу кусково-неперервних функцій; таке керування називається допустимим. Змінна t означає час та задовольняє обмеження $t_0 \le t \le t_1$, де t_0 і t_1 – відомі дійсні числа, причому $0 \le t_0 < t_1$. Для системи диференціальних рівнянь (1) задані початкові умови:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \; x_2(t_0) = x_{20}, \tag{2}$$

де x_{10} і x_{20} – задані дійсні числа. Метою керування є приведення керованого об'єкта в початок координат. Тому для оцінки якості процесу керування можна використати такий функціонал:

$$I(u, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t)]dt, \tag{3}$$

де f і g – задані додатні числа. Розглядається задача мінімізації функціонала (3) на множині розв'язків задачі (1), (2). Допустиме керування $u(t)$, на якому досягається мінімум функціонала (3), називається *оптимальним керуванням*.

Необхідні умови оптимальності

Для виведення необхідних умов оптимальності використаємо допоміжний функціонал

$$J(p_1, p_2, u, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t)]dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} p_1(t)\left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{\partial t}\right]dt + ,$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} p_2(t)\left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{\partial t}\right]dt, \tag{4}$$

де $p_1(t)$ і $p_2(t)$ – невідомі функції (множники Лагранжа). В такий спосіб задача оптимізації (1)–(3) зводиться до задачі мінімізації функціонала (4) з урахуванням початкових умов (2). Після цього знаходимо приріст ΔJ функціонала (4):

$$\Delta J = J(p_1 + \varepsilon\delta p_1, p_2 + \varepsilon\delta p_2, u + \varepsilon\delta u, x_1 +$$

$$+ \varepsilon\delta x_1, x_2 + \varepsilon\delta x_2) - J(p_1, p_2, u, x_1, x_2).$$

У розгорнутому вигляді останнє співвідношення матиме такий вигляд:

$$\Delta J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[f[x_1(t) + \varepsilon\delta x_1(t)]^2 + g[x_2(t) + \varepsilon\delta x_2(t)]^2 +$$

$$+ [u(t) + \varepsilon\delta u(t)]^2]dt + \int_{t_0}^{t_1}[p_1(t) + \varepsilon\delta p_1(t)]\left[x_2(t) +\right.$$

$$\left. + \varepsilon\delta x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{\partial t} - \varepsilon\frac{d\delta x_1(t)}{\partial t}\right]dt + \int_{t_0}^{t_1}[p_2(t) +$$

$$+ \varepsilon\delta p_2(t)]\left[u(t) + \varepsilon\delta u(t) - \frac{dx_2(t)}{\partial t} - \varepsilon\frac{d\delta x_2(t)}{\partial t}\right]dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t)]dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} p_1(t)\left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{\partial t}\right]dt - \int_{t_0}^{t_1} p_2(t)\left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{\partial t}\right]dt.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних членів отримаємо таке співвідношення:

$$\Delta J = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}[f x_1(t)\delta x_1(t) + g x_2(t)\delta x_2(t) +$$

$$+ u(t)\delta u(t)]dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1} p_1(t)\left[\delta x_2(t) - \frac{d\delta x_1(t)}{\partial t}\right]dt +$$

$$+ \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta p_1(t)\left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{\partial t}\right]dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1} p_2(t) \times$$

$$\times\left[\delta u(t) - \frac{d\delta x_2(t)}{\partial t}\right]dt + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\delta p_2(t)\left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{\partial t}\right]dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}[f[\delta x_1(t)]^2 + g[\delta x_2(t)]^2 + [\delta u(t)]^2]dt +$$

$$+ \varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\delta p_1(t)\left[\delta x_2(t) - \frac{d\delta x_1(t)}{\partial t}\right]dt +$$

$$+ \varepsilon^2\int_{t_0}^{t_1}\delta p_2(t)\left[\delta u(t) - \frac{d\delta x_2(t)}{\partial t}\right]dt. \tag{5}$$

Оскільки $\delta x_1(t_0) = x_{10} - x_{10} = 0$, то після інтегрування частинами знаходимо

$$\int_{t_0}^{t_1} p_1(t)\frac{d\delta x_1(t)}{\partial t}dt =$$

$$= p_1(t_1)\delta x_1(t_1) - p_1(t_0)\delta x_1(t_0) - \int_{t_0}^{t_1}\frac{dp_1(t)}{\partial t}\delta x_1(t)dt =$$

$$= p_1(t_1)\delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_1(t)}{\partial t}\delta x_1(t)\,dt. \quad (6)$$

Аналогічно отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} p_2(t)\frac{d\delta x_2(t)}{\partial t}dt = p_2(t_1)\delta x_2(t_1) -$$

$$- p_2(t_0)\delta x_2(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_2(t)}{\partial t}\delta x_2(t)dt =$$

$$= p_2(t_1)\delta x_2(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dp_2(t)}{\partial t}\delta x_2(t)dt. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (6) і (7) вираз (5) матиме вигляд

$$\Delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \left[\left[f x_1(t) + \frac{dp_1(t)}{\partial t} \right] \delta x_1(t) + \right.$$

$$+ \left[g x_2(t) + p_1(t) + \frac{dp_2(t)}{\partial t} \right] \delta x_2(t) + [u(t) +$$

$$\left. + p_2(t)]\delta u(t) \right] dt - p_1(t_1)\delta x_1(t_1) - p_2(t_1)\delta x_2(t_1) +$$

$$+ \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \delta p_1(t) \left[x_2(t) - \frac{dx_1(t)}{\partial t} \right] dt +$$

$$+ \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \delta p_2(t) \left[u(t) - \frac{dx_2(t)}{\partial t} \right] dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} [f[\delta x_1(t)]^2 + g[\delta x_2(t)]^2 + [\delta u(t)]^2] dt. \quad (8)$$

Необхідною умовою екстремуму функціонала (4) є рівність нулю його першої варіації. Ця умова буде виконаною, якщо мають місце такі рівності:

$$p_1(t_1) = 0, \; p_2(t_1) = 0, \; \frac{dp_1(t)}{\partial t} = -f x_1(t),$$

$$\frac{dp_2(t)}{\partial t} = -p_1(t) - g x_2(t),$$

$$\frac{dx_1(t)}{\partial t} = x_2(t), \; \frac{dx_2(t)}{\partial t} = u(t), \; u(t) + p_2(t) = 0.$$

Приєднуючи до них початкові умови (2), отримаємо систему співвідношень для знаходження оптимального керування $u(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{\partial t} = x_2(t), \; \dfrac{dx_2(t)}{\partial t} = u(t), \\ x_1(t_0) = x_{10}, \; x_2(t_0) = x_{20}, \\ \dfrac{dp_1(t)}{\partial t} = -f x_1(t), \; \dfrac{dp_2(t)}{\partial t} = -p_1(t) - g x_2(t), \\ p_1(t_1) = 0, \; p_2(t_1) = 0, \; u(t) + p_2(t) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Отже, має місце таке твердження.

Теорема 1. Оптимальне керування $u(t)$ визначається із системи співвідношень (9).

Виведення системи диференціальних рівнянь Ріккаті

Оскільки система (9) лінійна відносно невідомих функцій, то можна припустити існування таких залежностей:

$$p_1(t) = r_{11}(t)x_1(t) + r_{12}(t)x_2(t), \quad (10)$$

$$p_2(t) = r_{21}(t)x_1(t) + r_{22}(t)x_2(t), \quad (11)$$

де функції $r_{11}(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, $r_{22}(t)$ потрібно знайти. Безпосередньо із співвідношення (10) отримаємо

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \frac{dr_{11}(t)}{dt}x_1(t) + r_{11}(t)\frac{dx_1(t)}{dt} +$$

$$+ \frac{dr_{12}(t)}{dt}x_2(t) + r_{12}(t)\frac{dx_2(t)}{dt}.$$

Оскільки $\frac{dx_1(t)}{\partial t} = x_2(t)$, $\frac{dx_2(t)}{\partial t} = -r_{21}(t)x_1(t) - - r_{22}(t)x_2(t)$, то, беручи до уваги рівність (11), знаходимо

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \frac{dr_{11}(t)}{dt}x_1(t) + r_{11}(t)x_2(t) + \frac{dr_{12}(t)}{dt}x_2(t) -$$

$$- r_{12}(t)r_{21}(t)x_1(t) - r_{12}(t)r_{22}(t)x_2(t).$$

Враховуючи, що з іншого боку $\frac{dp_1(t)}{dt} = -f x_1(t)$, після порівняння останніх двох співвідношень отримаємо такі два рівняння:

$$\frac{dr_{11}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{21}(t) + f = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dr_{12}(t)}{dt} - r_{12}(t)r_{22}(t) + r_{11}(t) = 0. \quad (13)$$

Аналогічно із співвідношення (11) маємо

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \frac{dr_{21}(t)}{dt} x_1(t) + r_{21}(t) \frac{dx_1(t)}{dt} +$$
$$+ \frac{dr_{22}(t)}{dt} x_2(t) + r_{22}(t) \frac{dx_2(t)}{dt}$$

або

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \frac{dr_{21}(t)}{dt} x_1(t) + r_{21}(t) x_2(t) + \frac{dr_{22}(t)}{dt} x_2(t) -$$
$$- r_{21}(t) r_{22}(t) x_1(t) - r_{22}^2(t) x_2(t). \quad (14)$$

Із системи рівнянь (9) та співвідношення (10) знаходимо

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -r_{11}(t)x_1(t) - r_{12}(t)x_2(t) - gx_2(t).$$

На основі цього рівняння і співвідношення (14) отримаємо такі два рівняння:

$$\frac{dr_{21}(t)}{dt} - r_{21}(t) r_{22}(t) + r_{11}(t) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dr_{22}(t)}{dt} + r_{12}(t) + r_{21}(t) + g - r_{22}^2(t) = 0. \quad (16)$$

Рівності $p_1(t_1) = 0$, $p_2(t_1) = 0$, співвідношення (10) і (11) приводять до таких граничних умов:

$$r_{11}(t_1) = r_{12}(t_1) = r_{21}(t_1) = r_{22}(t_1) = 0. \quad (17)$$

Підсумовуючи наведені вище міркування, приходимо до такого твердження.

Теорема 2. Функції $r_{11}(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, $r_{22}(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь Ріккаті (12), (13), (15), (16) і задовольняють граничні умови (17).

Зауваження. Порівняння співвідношень (14) і (16) з урахуванням умов (17) приводить до висновку, що має місце рівність $r_{12}(t) = r_{21}(t)$.

Теорема 3. Якщо функції $r_{11}(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, $r_{22}(t)$ відомі, то оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = -r_{21}(t) x_1(t) - r_{22}(t) x_2(t), \quad (18)$$

де функції $x_1(t)$, $x_2(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -r_{21}(t) x_1(t) - r_{22}(t) x_2(t) \end{cases} \quad (19)$$

і задовольняють початкові умови (2).

Обчислення мінімального значення функціонала (3)

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (12), (13), (15), (16) дає можливість отримати формулу для обчислення мінімального значення функціонала (3). Для цього розглянемо такі очевидні рівності:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [x_i(t) r_{ij}(t) x_j(t)] dt = x_i(t_1) r_{ij}(t_1) x_j(t_1) -$$
$$- x_i(t_0) r_{ij}(t_0) x_j(t_0), \ i, j = 1, 2.$$

З урахуванням умов (17) ці рівності матимуть вигляд

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [x_i(t) r_{ij}(t) x_j(t)] dt + x_i(t_0) r_{ij}(t_0) x_j(t_0) = 0,$$
$$i, j = 1, 2.$$

Враховуючи ці співвідношення, функціонал (3) можна переписати так:

$$I(u, x_1, x_2) =$$
$$= \frac{1}{2} x_1(t_0) r_{11}(t_0) x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_1(t_0) r_{12}(t_0) x_2(t_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} x_2(t_0) r_{21}(t_0) x_1(t_0) + \frac{1}{2} x_2(t_0) r_{22}(t_0) x_2(t_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[f x_1^2(t) + g x_2^2(t) + u^2(t) + \frac{dx_1(t)}{dt} r_{11}(t) x_1(t) +$$
$$+ x_1(t) \frac{dr_{11}(t)}{dt} x_1(t) + x_1(t) r_{11}(t) \frac{dx_1(t)}{dt} +$$
$$+ \frac{dx_1(t)}{dt} r_{12}(t) x_2(t) + x_1(t) \frac{d_{12}(t)}{dt} x_2(t) +$$
$$+ x_1(t)\, {}_{12}(t) \frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} r_{21}(t) x_1(t) +$$
$$+ x_2(t) \frac{dr_{21}(t)}{dt} x_1(t) + x_2(t) r_{21}(t) \frac{dx_1(t)}{dt} +$$
$$+ \frac{dx_2(t)}{dt} r_{21}(t) x_1(t) + x_2(t) \frac{dr_{21}(t)}{dt} x_1(t) +$$
$$+ x_2(t) r_{21}(t) \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{dx_2(t)}{dt} r_{22}(t) x_2(t) +$$
$$+ x_2(t) \frac{dr_{22}(t)}{dt} x_2(t) + x_2(t) r_{22}(t) \frac{dx_2(t)}{dt} \Bigg] dt. \quad (20)$$

Якщо тепер взяти до уваги співвідношення (18) і систему рівнянь (19), то вираз (20) матиме вигляд

$$I(u,x_1,x_2)=$$

$$=\frac{1}{2}x_1(t_0)r_{11}(t_0)x_1(t_0)+\frac{1}{2}x_1(t_0)r_{12}(t_0)x_2(t_0)+$$

$$+\frac{1}{2}x_2(t_0)r_{21}(t_0)x_1(t_0)+\frac{1}{2}x_2(t_0)r_{22}(t_0)x_2(t_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[x_1(t)\left[\frac{dr_{11}(t)}{dt}-r_{12}(t)r_{21}(t)-r_{21}^2(t)+\right.\right.$$

$$\left.+r_{21}^2(t)+f\right]x_1(t)+x_1(t)\left[\frac{dr_{12}(t)}{dt}+r_{11}(t)-\right.$$

$$-r_{12}(t)r_{22}(t)-r_{21}(t)r_{22}(t)+r_{21}(t)r_{22}(t)]x_2(t)+$$

$$+x_2(t)\left[\frac{dr_{21}(t)}{dt}+r_{11}(t)-r_{22}(t)r_{21}(t)-r_{22}(t)r_{21}(t)+\right.$$

$$\left.+r_{22}(t)r_{21}(t)\right]x_1(t)+x_2(t)\left[\frac{dr_{22}(t)}{dt}+r_{12}(t)+r_{21}(t)-\right.$$

$$\left.\left.-r_{22}^2(t)-r_{22}^2(t)+r_{22}^2(t)+g\right]x_2(t)\right]dt.$$

Оскільки має місце система диференціальних рівнянь (12), (13), (15), (16) , то остаточно приходимо до такого співвідношення:

$$I(u,x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1(t_0)r_{11}(t_0)x_1(t_0)+$$

$$+x_1(t_0)r_{12}(t_0)x_2(t_0)+\frac{1}{2}x_2(t_0)r_{22}(t_0)x_2(t_0). \quad (21)$$

Теорема 4. Мінімальне значення функціонала (3) обчислюється згідно з формулою (21).

Виведення формул для розв'язку системи диференціальних рівнянь Ріккаті

Розв'язок системи диференціальних рівнянь Ріккаті можна отримати в замкненій формі методом, описаним у [2].

Якщо ввести позначення

$$\mathbf{R}(t)=\begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t)\\ r_{21}(t) & r_{22}(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}f&0\\0&g\end{bmatrix},$$

то систему рівнянь (12), (13), (15), (16) можна переписати як одне матричне диференціальне рівняння Ріккаті:

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}=-\mathbf{R}(t)\mathbf{P}-\mathbf{P}^T\mathbf{R}(t)+\mathbf{R}(t)\mathbf{S}\mathbf{R}(t)-\mathbf{Q}. \quad (22)$$

Умови (17) приводять до матричного співвідношення

$$\mathbf{R}(t_1)=\mathbf{0}. \quad (23)$$

Далі розглянемо таку матрицю четвертого порядку:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{P} & -\mathbf{S}\\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{P}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-1\\-f&0&0&0\\0&-g&-1&0\end{bmatrix}.$$

Власні числа матриці $\mathbf{H}$ задаються формулами

$$\alpha_1=-\sqrt{\frac{g-\sqrt{g^2-4f}}{2}},\ \alpha_2=\sqrt{\frac{g-\sqrt{g^2-4f}}{2}},$$

$$\alpha_3=-\sqrt{\frac{g+\sqrt{g^2-4f}}{2}},\ \alpha_4=\sqrt{\frac{g+\sqrt{g^2-4f}}{2}}.$$

Припустимо, що $g^2-4f>0$. Випадки, коли $g^2-4f=0$ або $g^2-4f<0$, розглядаються аналогічно. Введемо позначення

$$\lambda=\sqrt{\frac{g-\sqrt{g^2-4f}}{2}},\ \mu=\sqrt{\frac{g+\sqrt{g^2-4f}}{2}}.$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (13), (14), (16), (17) можна побудувати за допомогою матричної експоненти $\exp(\mathbf{H}t)$. Для її знаходження використано пакет прикладних програм Mathematica 5.2 [4, с. 266]. У результаті отримано таке твердження.

Теорема 5. Матриця $\exp(\mathbf{H}t)$ має вигляд

$$\exp(\mathbf{H}t)=\mathbf{S}(t)=\begin{bmatrix}s_{11}(t)&s_{12}(t)&s_{13}(t)&s_{14}(t)\\ s_{21}(t)&s_{22}(t)&s_{23}(t)&s_{24}(t)\\ s_{31}(t)&s_{32}(t)&s_{33}(t)&s_{34}(t)\\ s_{41}(t)&s_{42}(t)&s_{43}(t)&s_{44}(t)\end{bmatrix},$$

де

$$s_{11}(t)=\frac{f}{\sqrt{g^2-4f}}\left(\frac{\mathrm{ch}\lambda t}{\lambda^2}-\frac{\mathrm{ch}\mu t}{\mu^2}\right),$$

$$s_{21}(t) = \frac{f}{\sqrt{g^2 - 4f}}\left(\frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda} - \frac{\operatorname{sh}\mu t}{\mu}\right),$$

$$s_{31}(t) = \frac{f}{\sqrt{g^2 - 4f}}\left(\frac{\lambda^2}{\mu}\operatorname{sh}\mu t - \frac{\mu^2}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda t\right),$$

$$s_{41}(t) = \frac{f\,[\operatorname{ch}\mu t - \operatorname{ch}\lambda t]}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{12}(t) = \frac{\mu\operatorname{sh}\mu t - \lambda\operatorname{sh}\lambda t}{\sqrt{g^2 - 4f}},\ \ s_{22}(t) = \frac{\mu^2\operatorname{ch}\mu t - \lambda^2\operatorname{ch}\lambda t}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{32}(t) = \frac{f[\operatorname{ch}\lambda t - \operatorname{ch}\mu t]}{\sqrt{g^2 - 4f}},\ \ s_{42}(t) = \frac{\lambda^3\operatorname{sh}\lambda t - \mu^3\operatorname{sh}\mu t}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{13}(t) = \frac{1}{\sqrt{g^2 - 4f}}\left[\frac{\operatorname{sh}\mu t}{\mu} - \frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda}\right],\ \ s_{23}(t) = \frac{\operatorname{ch}\mu t - \operatorname{ch}\lambda t}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{33}(t) = \frac{\mu^2\operatorname{ch}\lambda t - \lambda^2\operatorname{ch}\mu t}{\sqrt{g^2 - 4f}},\ \ s_{43}(t) = \frac{\lambda\operatorname{sh}\lambda t - \mu\operatorname{sh}\mu t}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{14}(t) = \frac{\operatorname{ch}\lambda t - \operatorname{ch}\mu t}{\sqrt{g^2 - 4f}},\ \ s_{24}(t) = \frac{\lambda\operatorname{sh}\lambda t - \mu\operatorname{sh}\mu t}{\sqrt{g^2 - 4f}},$$

$$s_{34}(t) = \frac{f}{\sqrt{g^2 - 4f}}\left(\frac{\operatorname{sh}\mu t}{\mu} - \frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\lambda}\right),$$

$$s_{44}(t) = \frac{\mu^2\operatorname{ch}\mu t - \lambda^2\operatorname{ch}\lambda t}{\sqrt{g^2 - 4f}}.$$

Якщо ввести позначення

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ \ \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{11}(t) = \begin{bmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) \\ s_{21}(t) & s_{22}(t) \end{bmatrix},\ \ \mathbf{F}_{12}(t) = \begin{bmatrix} s_{13}(t) & s_{14}(t) \\ s_{23}(t) & s_{24}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{21}(t) = \begin{bmatrix} s_{31}(t) & s_{32}(t) \\ s_{41}(t) & s_{42}(t) \end{bmatrix},\ \ \mathbf{F}_{22}(t) = \begin{bmatrix} s_{33}(t) & s_{34}(t) \\ s_{43}(t) & s_{44}(t) \end{bmatrix},$$

то можна записати такі рівності:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) &= \mathbf{F}_{11}(t_1 - t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{F}_{12}(t_1 - t)\mathbf{p}(t), \\ \mathbf{p}(t_1) &= \mathbf{F}_{21}(t_1 - t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{22}(t_1 - t)\mathbf{p}(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Із співвідношень $p_1(t_1) = 0$, $p_2(t_1) = 0$ маємо $\mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}$. Тому на підставі співвідношення (24) отримаємо

$$\mathbf{F}_{21}(t_1 - t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{22}(t_1 - t)\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}.$$

З останньої рівності знаходимо

$$\mathbf{p}(t) = -\mathbf{F}_{22}^{-1}(t_1 - t)\mathbf{F}_{21}(t_1 - t)\,\mathbf{x}(t).$$

Порівняння цієї рівності та співвідношення $\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}(t)\,\mathbf{x}(t)$ приводить до такого висновку.

Теорема 6. Матрицю $\mathbf{R}(t)$ можна знайти з допомогою співвідношення

$$\mathbf{R}(t) = -\mathbf{F}_{22}^{-1}(t_1 - t)\,\mathbf{F}_{21}(t_1 - t).$$

Оптимальне керування $u(t)$ має вигляд $u(t) = -r_{21}(t)x_1(t) - r_{22}(t)x_2(t)$, де функції $x_1(t)$, $x_2(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -r_{21}(t)x_1(t) - r_{22}(t)x_2(t) \end{cases}$$

і задовольняють початкові умови (2).

Висновки

У статті розглядається лінійно-квадратична задача оптимального керування. Актуальність цієї задачі не викликає сумнівів. У статті показано, що оптимальне керування можна успішно знайти за допомогою методу множників Лагранжа. В такий спосіб отримані необхідні умови оптимальності та доведена єдиність оптимального керування. На підставі цих результатів виведені система диференціальних рівнянь Ріккаті та формула для обчислення мінімального значення цільового функціонала.

Основним результатом роботи є аналітичні формули для обчислення оптимального керування та мінімального значення цільового функціонала. Одержані результати можна використати для дослідження процесу посадки літака [5]. У перспективі важливим є отримання формул для обчислення функцій $r_{11}(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{21}(t)$, $r_{22}(t)$ методом, запропонованим у [6]. Цікавим для подальших досліджень є також ускладнення розглянутої математичної моделі в напрямах, описаних у [7–9]. Можна також дослідити дискретний варіант розглянутої задачі оптимізації та аналогічну математичну модель, у якій буде враховано вплив випадкових перешкод.

Список літератури

1. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
2. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.
3. *Ройтенберг Я.Н.* Автоматическое управление. – М.: Наука, 1978. – 551 с.
4. *Васильев А.Н.* Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач. – К.: Век+, СПб: Корона.Век, 2008. – 448 с.
5. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
6. *Копец М.М.* Задача оптимального управления процессом колебания струны // Теорія оптимальних рішень. – 2014. – С. 32–38.
7. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
8. *Chikrii A.A., Eidel'man S.D.* Game control problem for quasi-linear systems with fractional derivatives of Riemann–Liouville // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – **35**, № 6. – P. 66–99.
9. *Eidel'man S.D., Chikrii A.A.* Dynamic game approach problem for equations of fractional order // Український мат. журнал. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1566–1583.

References

1. J.N. Andreev, *Control by Finite Dimensional Linear Objects.* Moscow, USSR: Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).
2. B.N. Bublic and N.F. Kirichenko, *Fundamentals of the Control Theory.* Kyiv, USSR: Vyshcha Shkola, 1975, 328 p. (in Russian).
3. J.N. Rojtenberg, *Automatic Control.* Moscow, USSR: Nauka, 1978, 551 p. (in Russian).
4. A.N. Vasiljev, *Mathematica. A practical Course with Examples of the Solution of Applied Poblems.* Kyiv, Ukraine: Vek+, St. Petersburg, Russia: Korona.Vek, 2008, 448 p. (in Russian).
5. A.M. Letov, *The Dynamics of Flight and Control.* Moscow, USSR: Nauka, 1969, 360 p. (in Russian).
6. M.M. Kopets, “Optimal control problem by process of a string vibration”, *Teoriya Optymal'nykh Rishen'*, pp. 32–38, 2014 (in Russian).
7. A.A. Chikrii, *Conflict Controlled Processes.* Kyiv, Ukraine: Naykova Dumka, 1992, 384 p. (in Russian).
8. A.A. Chikrii and S.D. Eidel'man, “Game control problem for quasi-linear systems with fractional derivatives of Riemann–Liouville”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 36, no. 6, pp. 66–99, 2012.
9. S.D. Eidel'man and A.A. Chikrii, “Dynamic game approach problem for equations of fractional order”, *Ukrayins'kyy Matematychnyy Zhurnal*, vol. 52, no. 11, pp. 1566–1583, 2000.

М.М. Копець

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Проблематика. Для керованого об’єкта, поведінка якого описується системою двох лінійних диференціальних рівнянь та критерієм якості у вигляді квадратичного функціонала, розглядається задача знаходження оптимального керування. На противагу загальновживаним методам дослідження цієї задачі (принцип максимуму Понтрягіна, метод динамічного програмування Беллмана) автором запропоновано метод множників Лагранжа. Такий підхід дав можливість більш ефективно отримати розв’язок досліджуваної задачі оптимізації порівняно із зазначеними вище методами.

Мета дослідження. Мета роботи – отримати формули для обчислення оптимального керування та мінімального значення функціонала якості.

Методика реалізації. У роботі використано методи варіаційного числення.

Результати дослідження. Отримано необхідні умови оптимальності та доведено єдиність оптимального керування. На основі цих умов виведено систему диференціальних рівнянь Ріккаті.

Висновки. Розв’язок отриманої системи дає змогу виписати явну формулу для оптимального керування та формулу для обчислення мінімального значення функціонала якості. Результати, отримані в роботі, можна використати для дослідження процесу посадки літака.

Ключові слова: квадратичний функціонал; метод множників Лагранжа; необхідні умови оптимальності; оптимальне керування; система диференціальних рівнянь Ріккаті.

М.М. Копец

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проблематика. Для управляемого объекта, поведение которого описывается системой двух линейных дифференциальных уравнений и критерием качества в виде квадратического функционала, рассматривается задача нахождения оптимального управления. В противовес общеупотребляемым методам исследования этой задачи (принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана) автором предложен метод множителей Лагранжа. Такой подход предоставил возможность более эффективно получить решение исследуемой задачи оптимизации по сравнению с упомянутыми выше методами.

Цель исследования. Цель работы – получить формулы для вычисления оптимального управления и минимального значения функционала качества.

Методика реализации. В работе использованы методы вариационного исчисления.

Результаты исследования. Получены необходимые условия оптимальности и доказана единственность оптимального управления. На основе этих условий выведена система дифференциальных уравнений Риккати.

Выводы. Решение полученной системы позволяет выписать явную формулу для оптимального управления и формулу для вычисления минимального значения функционала качества. Результаты, полученные в статье, можно использовать для исследования процесса посадки самолета.

Ключевые слова: квадратичный функционал; метод множителей Лагранжа; необходимые условия оптимальности; оптимальное управление; система дифференциальных уравнений Риккати.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 6 березня 2015 року