УДК 517.98+514.76
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.70018

О.Ю. Потапенко
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ РІМАНОВІ МНОГОВИДИ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

Background. Solving boundary value problems on infinitedimensional Riemmanian manifolds, in particular researching Dirichlet problem, seems to demand for metric completeness. It does not appear to be feasible to state metric completeness in the general case, hence stems the issue of giving sufficient conditions of it.
Objective. Giving sufficient conditions of metric completeness of infinitedimensional Riemmanian manifolds and essential examples that would satisfy them.
Methods. Basic results of functional analysis and contemporary differential geometry are used.
Results. Sufficient conditions of infinitedimensional Riemmanian manifolds completeness have been formulated and proved. It has been proved that given conditions are satisfied for by level surfaces of finite codimension with certain bounds on first and second derivatives of the respective functions.
Conclusions. The Sufficient conditions of Riemmanian manifolds completeness — structure uniformity — look to be promising, since they are satisfied for at least by one relatively wide class of surfaces in Hilbert's space. In terms of future researches, it now appears to be reasonable to devise approaches to considering boundary value problems on such infinitedimensional Riemmanian manifolds.
Keywords: infinitedimensional space; Riemmanian manifold; differential geometry.

Вступ

Ріманові многовиди — гладкі многовиди зі скалярним добутком на дотичному просторі в кожній точці — є основним об'єктом дослідження ріманової геометрії, розділу диференціальної геометрії.

Класичним, скінченновимірним рімановим многовидам та рімановій геометрії в цілому присвячені, наприклад, праці [1, 2]. До більш сучасних робіт, присвячених скінченновимірним рімановим многовидам, можна віднести праці [3—5].

Нескінченновимірна ріманова геометрія розглядається, зокрема, у [6]. Варто зауважити, що наведене в [6] узагальнення скінченновимірних ріманових многовидів на нескінченновимірний випадок відрізняється від підходу нашої роботи: в [6] пропонується запровадження ріманового тензора лише на деякому підрозшаруванні дотичного розшарування.

Постановка задачі

Мета роботи — дослідження нескінченновимірних ріманових многовидів з метою отримання додаткових умов, що забезпечують їх метричну повноту, та наведення прикладів таких многовидів.

У [7] розглядається L^2-версія лапласіана за мірою і розв'язується задача Діріхле у випадку нескінченновимірного гільбертового простору. При розв'язанні аналогічної проблеми на нескінченновимірних ріманових многовидах природним чином виникає вимога метричної повноти. В цій роботі пропонується конструкція нескінченновимірного ріманового многовиду, розглядаються додаткові умови, які гарантують метричну повноту, що дає змогу в подальшому розглядати L^2-версію лапласіана за мірою і розв'язувати задачу Діріхле на такому рімановому многовиді.

Ріманові многовиди

Означення ріманового многовиду. Нехай на гладкому дійсному гільбертовому многовиді M (ступеня гладкості v) з модельним простором H дано g — гладке симетричне строго додатно визначене тензорне поле типу $(2,0)$. У кожній точці $p \in M$ тензор g_p є полілінійним обмеженим відображенням $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Тобто

$\forall p \in M, (U, \varphi)$ — карти в p $\exists \delta^{\varphi} > 0 : \forall \xi_1, \xi_2 \in T_pM$:

$$g_p(\xi_1, \xi_2) = g_p(\xi_2, \xi_1); g_p(\xi_1, \xi_1) \geq \delta^{\varphi} \|\xi_1^{\varphi}\|_H^2,$$

та $\forall G$ — відкритої підмножини в $M \forall X, Y$ — гладких векторних полів на G:

$g_q(X_q, Y_q)$ — гладка на G як функція від q зі степенем гладкості $v-1$.

Таке поле називається *основним тензором* або *метричним тензором* на M. *Рімановим (гільбертовим) многовидом* називається об'єкт, що складається з гладкого гільбертового многовиду і заданого на ньому метричного тензора.

Заданий метричний тензор дає змогу визначити внутрішній (скалярний) добуток для $\xi_1, \xi_2 \in T_p M : (\xi_1, \xi_2)_p = (\xi_1, \xi_2) = g_p(\xi_1, \xi_2)$.

Введений на $T_p M$ скалярний добуток дає можливість природним чином ввести довжину кусково-гладкого шляху $c : [\alpha, \beta] \to M$:

$$L_c(t) = \int_\alpha^t \|\dot{c}(\tau)\| d\tau; L(c) = L_c(\beta) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(\tau)\| d\tau.$$

Введення метрики на ріманових многовидах. На зв'язному рімановому многовиді можна ввести внутрішню метрику:

$$\rho(p, q) = \inf\{L(c) \mid c(\alpha) = p, c(\beta) = q\},$$

де $c : [\alpha, \beta] \to M$ — кусково-гладкі шляхи, що поєднують точки p та q. Оскільки, як відомо, зв'язний многовид є гладким зв'язним, то введене означення є коректним. Також нескладно переконатися у виконанні властивостей метрики.

Метрична повнота ріманового многовиду. Для доведення метричної повноти ріманового многовиду запровадимо умову рівномірності диференціальної структури.

***Означення* 1.** Нехай M — рімановий многовид. Диференціальна структура M буде називатися "рівномірною", якщо $\exists r > 0, \delta^-, \delta^+ > 0$:

1) $\forall p \in M \quad \exists$ карта $(\varphi_p, U_p) : \varphi_p(U_p) \supset \supset B_r(\varphi_p(p))$;

2) $\forall p \in M, q \in U_p, \xi \in T_q M : \delta^- \|\xi^{\varphi_p}\|_H^2 \le \le g_q(\xi, \xi) \le \delta^+ \|\xi^{\varphi_p}\|_H^2$ для карти (φ_p, U_p) з умови 1,

де $B_r(\varphi_p(p)) = \{x \in H : \|x - \varphi_p(p)\| < r\}$ — відкрита куля радіуса r з центром в $\varphi_p(p)$.

Многовид з такою диференціальною структурою будемо називати "рівномірним".

Зауваження. Це означення відрізняється від рівномірності структури банахових многовидів, що введена в [8, 9], але схожість очевидна. Як зауважено в [10], рівномірність банахового многовиду також дає змогу отримати повноту запропонованої в [10] метрики.

Лема 1. Якщо M — рівномірний рімановий многовид, то $(p, q \in M, 0 < R \le r : \rho(p, q) \le \le R \cdot \delta^-) \Rightarrow (\varphi_p(q) \in B_R(\varphi_p(p)) \subset \varphi_p(U_p))$, де r і δ^- — константи, що існують відповідно до означення 1, а (φ_p, U_p) — карта з умови 1 означення 1.

Доведення. Доведемо від супротивного: $\varphi_p(q) \notin B_R(\varphi_p(p))$. Тоді $\rho(p, q) \ge L(c)$, де $c : [0; 1] \to \to M$ — гладкий шлях, що поєднує p і q: $c(0) = p, \quad c(1) = q$. Нескладно показати, що $\exists \tau \in \in (0; 1) : c(t) \in U_p \forall t \in [0; \tau], \varphi_p(c(\tau)) \in \partial B_R(\varphi_p(p))$, тому

$$\rho(p, q) \ge L(c) > L_c(\tau) = \int_0^\tau c'(t) dt \ge \int_0^\tau \delta(\varphi_p \circ c)(t) dt \ge$$

$$\ge \delta^- \varphi_p(c(\tau)) - \varphi_p(p) = \delta^- \cdot R.$$

Лема 2. Якщо M — рівномірний рімановий многовид, то $(p, q \in M, 0 < R \le r : \varphi_p(q) \in \in B_R(\varphi_p(p)) \subset \varphi_p(U_p)) \Rightarrow (\rho(p, q) \le R \cdot \delta^+)$, де r і δ^+ — константи, що існують згідно з означенням 1, а (φ_p, U_p) — карта з умови 1 означення 1.

Доведення. Розглянемо гладкий шлях

$$c(t) = \varphi_p^{-1}((1 - t)\varphi_p(p) + t\varphi_p(q)),$$

$$c : [0; 1] \to \varphi_p^{-1}(B_R(\varphi_p(p))).$$

Тоді

$$L(c) = \int_0^1 \|c'(t)\| dt \le \delta^+ \int_0^1 \|(\varphi_p \circ c)(t)\|_H dt =$$

$$= \delta^+ \int_0^1 \|((1 - t)\varphi_p(p) + t\varphi_p(q))'\|_H dt =$$

$$= \delta^+ \int_0^1 \|\varphi_p(q) - \varphi_p(p)\|_H dt \le \delta^+ R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(p, q) \le \delta^+ R.$$

З лем 1 і 2 випливає метрична повнота рівномірного ріманового многовиду.

***Твердження* 1.** Рівномірний рімановий многовид M є метрично повним.

Доведення. Нехай $\{p_n\}$ — фундаментальна послідовність точок, тоді $\exists N : \forall n, m \ge \ge N : \rho(p_n, p_m) < \delta^- \cdot R \Rightarrow p_n \in \varphi_{p_N}^{-1}(B_R(\varphi_{p_N}(p_N))) \subset \subset U_{p_N}$, де $R = \dfrac{1}{3} \dfrac{\delta^-}{\delta^+} r$.

Доведемо, що $\forall n \ge N : \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n))) \subset \subset \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N)))$. Нехай $q \in \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$, тоді згідно з лемою 2 та з урахуванням нерівності трикутника

$$\rho(p_N, q) \le \rho(p_N, p_n) + \rho(p_n, q) \le \delta^- R + \delta^+ R = = \frac{1}{3}\frac{\delta^-}{\delta^+} r\delta^- + \frac{1}{3}\delta^- r \le \frac{2}{3}\delta^- r < \delta^- r,$$

тому з урахуванням леми 1

$$q \in \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N))).$$

Тепер покажемо, що послідовність $\{\varphi_{p_N}(p_n)\}_{n=N\ldots\infty}$ збіжна. По-перше, $\rho(p_n, p_m) < < \delta^- \cdot R \Rightarrow p_m \in \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$. Більше того, будь-який гладкий шлях $c:[0;1] \to M$, що поєднує p_n і p_m і виходить за межі $\varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n)))$, має довжину, не меншу за $\delta^- \cdot R$ (див. доведення леми 1). Отже, для визначення $\rho(p_n, p_m)$ достатньо розглянути лише $\tilde{c}:[0;1] \to \varphi_{p_n}^{-1}(B_R(\varphi_{p_n}(p_n))) \subset \varphi_{p_N}^{-1}(B_r(\varphi_{p_N}(p_N)))$:

$$\rho(p_n, p_m) = \inf_{\tilde{c}} L(\tilde{c}) = \inf_{\tilde{c}} \int_0^1 \|c(t)\|\, dt \ge$$
$$\ge \inf_{\tilde{c}} \delta^- \int_0^1 \|\varphi_{p_N} \circ \tilde{c}(t)\|_H \ge$$
$$\ge \inf_{\tilde{c}} \delta^- \|\varphi_{p_N}(\tilde{c}(1)) - \varphi_{p_N}(\tilde{c}(0))\|_H =$$
$$= \delta^- \|\varphi_{p_N}(p_m) - \varphi_{p_N}(p_n)\|_H,$$

тому, оскільки $\{p_n\}$ — фундаментальна послідовність точок, то і $\{\varphi_{p_N}(p_n)\}_{n=N\ldots\infty}$ фундаментальна, а отже, збіжна в $B_R(\varphi_{p_N}(p_N))$. Тобто $\exists x_0 : \varphi_{p_N}(p_n) \to x_0$.

Нарешті, доведемо, що $p_n \to p_0 = \varphi_{p_N}^{-1}(x_0)$. Візьмемо

$$c_n(t) = \varphi_{p_N}^{-1}((1-t)\varphi_{p_N}(p_n) + t\varphi_{p_N}(p_0)), t \in [0;1].$$

Тоді

$$\rho(p_n, p_0) \le L(c_n) \le \delta^+ \|\varphi_{p_N}(p_0) - \varphi_{p_N}(p_n)\|_H =$$
$$= \delta^+ \|x_0 - \varphi_{p_N}(p_n)\|_H \to 0,$$

отже, $p_n \to p_0$.

Кути між замкненими підпросторами у гільбертовому просторі

У цьому розділі ми введемо та розглянемо поняття кута між замкненими підпросторами в гільбертовому просторі. Результати цього розділу нам знадобляться у подальшому для побудови прикладу рівномірного ріманового многовиду як поверхні в гільбертовому просторі.

Нехай H — гільбертів простір. A, B — замкнені підпростори H. Введемо поняття косинуса кута між A і B.

Означення 2. $\cos(A \hat{\ } B) = \max\left\{ \inf\limits_{y \in B\setminus\{0\}} \max\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \cos(x \hat{\ } y);\ \inf\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \max\limits_{Y \in B\setminus\{0\}} \cos(x \hat{\ } y) \right\}$.

Зауваження. Геометричну доцільність такого означення можна обґрунтувати тим, що, як і в класичній тривимірній стереометрії, косинус кута між площинами корозмірності 1, визначиного таким чином, рівен косинусу кута між їх нормалями (випливає з тотожності $\cos(A \hat{\ } B) = |||\Gamma^{-1}|||^{-1}$, яка буде наведена нижче).

Загальна формула. Нехай $P: H \ni h \mapsto \mathrm{pr}_A h$; $Q: H \ni h \mapsto \mathrm{pr}_B h$.

Тоді

$$\cos(x \hat{\ } y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{(x, \mathrm{pr}_A y + \mathrm{ort}_A y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = = \frac{(x, Py)}{\|x\| \cdot \|y\|} \frac{\|Py\|}{\|y\|}.$$

Очевидно, що якщо $A^\perp \cap B \ne \{0\}$, то $\inf\limits_{y \in B\setminus\{0\}} \max\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \cos(x \hat{\ } y) = 0$, інакше $\max\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \cos(x \hat{\ } y) = = \frac{\|Py\|}{\|y\|}$, і максимум досягається при $x = = Py \ne 0$; $Py = P|_B y$, і оскільки $A^\perp \cap B = \{0\} \Rightarrow \Rightarrow \mathrm{Ker}\, P|_B = \{0\}$, то

$$\inf_{y \in B\setminus\{0\}} \frac{\|Py\|}{\|y\|} = \left(\sup_{y \in B\setminus\{0\}} \frac{\|(P|_B)^{-1} y\|}{\|y\|} \right)^{-1} = = |||(P|_B)^{-1}|||^{-1},$$

де $|||\cdot|||$ — операторна норма.

Будемо вважати, що $|||R^{-1}|||^{-1} = \inf_{x\neq 0}\frac{Rx}{x} = 0,$ якщо $\mathrm{Ker}R \neq \{0\}$. Тоді маємо таку формулу для визначення косинуса кута між замкненими підпросторами:

$$\cos(A\hat{\ }B) = \max\{|||(P|_B)^{-1}|||^{-1}; |||(Q|_A)^{-1}|||^{-1}\}. \quad (1)$$

Кут між поверхнями скінченної корозмірності. Нехай $A = \{n_1; n_2; \ldots; n_k\}^{\perp}$, $B = \{m_1; m_2; \ldots; m_p\}^{\perp}$ — поверхні скінченної корозмірності (k і p відповідно) в H, причому $k \geq p$ і $\{n_1; n_2; \ldots; n_k\}$, $\{m_1; m_2; \ldots; m_p\}$ — ортонормовані системи. Використовуючи загальну формулу (1), нескладно переконатися, що:

$$\cos(A\hat{\ }B) = \begin{cases} |||(\Gamma^*\Gamma)^{-1}\Gamma^*|||^{-1}, & \mathrm{rang}(\Gamma) = p, \\ 0, & \mathrm{rang}(\Gamma) < p, \end{cases}$$

де $\Gamma = \begin{pmatrix} (n_1, m_1) & \cdots & (n_1, m_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (n_k, m_1) & \cdots & (n_k, m_p) \end{pmatrix}.$

Якщо $p = k$, то косинус кута між площинами A і B знаходиться за формулою

$$\cos(A\hat{\ }B) = |||\Gamma^{-1}|||^{-1}. \quad (2)$$

***Зауваження* 1.** Варто зазначити, що при $p = k: |||(P|_B)^{-1}|||^{-1} = |||\Gamma^{-1}|||^{-1} = |||(Q|_A)^{-1}|||^{-1}$, а отже

$$\cos(A\hat{\ }B) = \inf_{y\in B\setminus\{0\}}\max_{x\in A\setminus\{0\}}\cos(x\hat{\ }y) =$$

$$= \inf_{x\in A\setminus\{0\}}\max_{Y\in B\setminus\{0\}}\cos(x\hat{\ }y).$$

Нижня оцінка косинуса кута між поверхнями однакової скінченної корозмірності. Формула (2) є загальною, але не є зручною, особливо в тому випадку, коли виникає необхідність працювати з довільним, не обов'язково ортонормованим, базисом, тому ми отримаємо нижню оцінку косинуса, яка нам знадобиться для побудови прикладу рівномірного ріманового многовиду. Для цього нам знадобляться дві леми, які ми надаємо без доведення.

Лема 3. Нехай $C = (v_1 v_2 \ldots v_n)$ — невироджена матриця розміру $n \times n$ ($\{v_1; \ldots; v_n\}$ — лінійно незалежні (л.н.з.). Тоді $|||C^{-1}||| = \sqrt{|||\Gamma\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|^2}; \ldots; \frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right\}|||}$, де $\Gamma\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|^2}; \ldots; \frac{v_n}{\|v_n\|^2}\right\}$ — матриця Грама.

Лема 4. Нехай $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ — самоспряжена додатньо визначена матриця. Тоді $|||C||| = \rho(C) \leq n^{3/2}\cdot\max_{i=1\ldots n} c_{ii}$.

Як наслідок формули (2) і лем 3 і 4, маємо

$$\cos(A\hat{\ }B) \geq k^{-\frac{3}{4}}\cdot\min_{i=1..k}\left(\sum_{j=1}^{k}(n_i, m_j)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= k^{-\frac{3}{4}}\cdot\min_{i=1..k}\mathrm{pr}_{B^{\perp}} n_i \geq$$

$$\geq k^{-\frac{3}{4}}\min\{\|\mathrm{pr}_{B^{\perp}} v\| \,|\, v \in A^{\perp}; \|v\| = 1\}. \quad (3)$$

Тепер нехай $\{\tilde{n}_1; \ldots; \tilde{n}_k\}$ і $\{\tilde{m}_1; \ldots; \tilde{m}_k\}$ — довільні л.н.з. базиси $A^{\perp}$ і $B^{\perp}$ відповідно. Розглянемо довільний $v \in A^{\perp}$:

$$v \in A^{\perp} \Leftrightarrow \exists c = \{c_1; \ldots; c_k\} \in \mathbb{R}^k : v = \sum_{i=1}^{k} c_i \tilde{n}_i;$$

$$\mathrm{pr}_{B^{\perp}} v \in B^{\perp} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists d = \{d_1; \ldots; d_k\} \in \mathbb{R}^k : \mathrm{pr}_{B^{\perp}} v = \sum_{i=1}^{k} d_i \tilde{m}_i;$$

$$\forall j = 1..k (v - \mathrm{pr}_{B^{\perp}} v, \tilde{m}_j) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k}(c_j(\tilde{n}_i, \tilde{m}_j) - d_i(\tilde{m}_i, \tilde{m}_j)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1 d = \Gamma_{01} c \Leftrightarrow d = \Gamma_1^{-1}\Gamma_{01} c,$$

де $\Gamma_1 = \Gamma\{\tilde{m}_1; \ldots; \tilde{m}_k\}$ – матриця Грама, $\Gamma_{01} = \begin{pmatrix} (\tilde{n}_1, \tilde{m}_1) & \cdots & (\tilde{n}_k, \tilde{m}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{n}_1, \tilde{m}_k) & \cdots & (\tilde{n}_k, \tilde{m}_k) \end{pmatrix}.$

$$\|v\|^2 = 1 \Leftrightarrow (\Gamma_0 c, c) = 1 \Leftrightarrow \|\sqrt{\Gamma}_0 c^2\| =$$

$$= 1 \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}^k : c = (\sqrt{\Gamma}_0)^{-1} f, \|f\| = 1,$$

де $\Gamma_0 = \Gamma\{n_1; \ldots; n_k\}$ — матриця Грама. Тоді

$$\|\mathrm{pr}_{B^\perp} v\| = \sqrt{(\Gamma_1 d, d)} = \sqrt{(\Gamma_{01}c, \Gamma_1^{-1}\Gamma_{01}c)} =$$
$$= \sqrt{(\Gamma_{01}^*\Gamma_1^{-1}\Gamma_{01}c, c)} =$$
$$= \sqrt{((\sqrt{\Gamma}_0)^{-1}\Gamma_{01}^*\Gamma_1^{-1}\Gamma_{01}(\sqrt{\Gamma}_0)^{-1} f, f)} \geq$$
$$\geq \|\|\sqrt{\Gamma}_0\Gamma_{01}^{-1}\Gamma_1(\Gamma_{01}^*)^{-1}\sqrt{\Gamma}_0\|\|^{-1} \geq$$
$$\geq \Gamma_0^{-1}\cdot\|\|\Gamma_1\|\|^{-1}\cdot\|\|\Gamma_{01}^{-1}\|\|^{-2},$$

тому, враховуючи нерівність (3) і леми 3 і 4, маємо

$$\cos(A\hat{\ }B) \geq k^{-\frac{9}{2}} \min_{i,j,l=1..k} \frac{\sum_{p=1}^{k}(\tilde{n}_l, \tilde{m}_p)^2}{\|\tilde{n}_i{}^2\|\cdot\|\tilde{m}_j{}^2\|}. \qquad (4)$$

Гладка поверхня рівня в гільбертовому просторі як рівномірний рімановий многовид

Теорема 1. Нехай H – гільбертовий простір; $F_k \in C^1(H)$. $M = \{x \in H : F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_n(x) = 0\}$ – поверхня рівня корозмірності n ($\{\mathbf{grad}F_1(p),\ldots,\mathbf{grad}F_n(p)\}$ – л.н.з $\forall p \in M$). Нехай сім'я функцій $\{F_1,\ldots,F_n\}$ задовольняє таку умову: $\exists\delta, K > 0 : \forall x \in$ о.о.(M) (опукла оболонка M), $\forall p \in M$, $i, j = 1..n$ виконуються нерівності

$$\begin{cases} |F_i''(x)| \leq K, \\ \dfrac{|F_i'(p)|}{|F_j'(p)|} \leq K, \\ |F_i'(p)| \geq \delta. \end{cases}$$

Тоді M як гладкий многовид, диференціальна структура якого індукована за рахунок вкладення в H, буде рівномірним рімановим многовидом. Зауважимо, що як метричний тензор беремо скалярний добуток у H: $g_p(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)_H$.

Д о в е д е н н я. Для перевірки рівномірності в кожній точці наведемо карти, що мають існувати згідно з означенням 1, і покажемо, що для них виконуються відповідні умови:

$$U_p = \left\{ q \in M : \|p - q\| < \frac{\delta}{2K} \right\}; \varphi_p(q) = \mathrm{pr}_{T_pM}\, q,$$

де $T_pM = \{\mathbf{grad}F_1(p),\ldots,\mathbf{grad}F_n(p)\}^\perp \subset H$.

Умова 2 перетворюється в існування такого $\varepsilon > 0$, що для всіх $p \in M, q \in U_p, \xi \in T_qM$:

$$\|\mathrm{pr}_{T_pM}\, \xi\| \geq \varepsilon\|\xi\|.$$

Умова 1 виконується очевидним чином.

Виходячи з означення косинуса кута між замкненими підпросторами та враховуючи зауваження 1, маємо

$$\|\mathrm{pr}_{T_pM}\, \xi\| = \max_{x \in T_pM\setminus\{0\}} \cos(\xi\hat{\ }x)\cdot\|\xi\| \geq$$
$$\geq \cos(T_qM\hat{\ }T_pM)\cdot\|\xi\|,$$

тобто достатньо показати, що $\exists\varepsilon > 0 : \forall p \in M, q \in U_p : \cos(T_qM\hat{\ }T_pM) \geq \varepsilon$.

Спочатку покажемо, що $\forall p \in M, q \in U_p$, $i, j = 1..n : \cos(\mathbf{grad}F_i(p)\hat{\ }\mathbf{grad}F_j(q)) > \frac{1}{2}$:

$$\cos(\mathbf{grad}F_i(p)\hat{\ }\mathbf{grad}F_j(q)) = \cos(F_i'(p)\hat{\ }F_j'(q)) =$$
$$= \frac{(F_i'(p), F_j'(q))}{\|F_i'(p)\cdot F_j'(q)\|} \geq$$
$$\geq \frac{(F_i'(p), F_j'(q))}{\|F_i'(p)\cdot F_j'(q)\|} - \frac{(\|F_i'(p) - F_j'(q)\|)^2}{2\,\|F_i'(p)\|\cdot\|F_j'(q)\|} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2\|F_i'(p)\|\cdot\|F_j'(q)\|}\,\|F_i'(p) - F_j'(q)\|^2 \geq$$
$$\geq 1 - \frac{1}{2\delta^2}\,\|F_i'(p) - F_j'(q)\|^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2\delta^2}\,\| \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(F_i'(tp + (1-t)q) -$$
$$- F_j'(tq + (1-t)p)\Big)dt\,\|^2 \geq 1 - \frac{1}{2\delta^2}\times$$
$$\times\left(\int_0^1 \|\| F_i''(tp + (1-t)q) + F_j''(tq + (1-t)p\|\|\times\right.$$
$$\times\|p - q\|\,dt)^2 \geq 1 - \frac{1}{2\delta^2}\cdot 4K^2\cdot\|p - q\|^2 > \frac{1}{2},$$

тому, враховуючи нерівності (3), (4), маємо

$$\cos(T_qM\hat{\ }T_pM) \geq$$
$$\geq n^{-\frac{9}{2}}\cdot\min_{i,j,l=1..n}\frac{\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{grad}F_k(q), \mathbf{grad}F_l(p))^2}{\|\mathbf{grad}F_i(p)\|^2\cdot\|\mathbf{grad}F_j(q)\|^2} \geq$$
$$\geq n^{-\frac{9}{2}}\cdot\min_{i,j,l=1..n}\frac{(\mathbf{grad}F_j(q), \mathbf{grad}F_l(p))^2}{\|\mathbf{grad}F_i(p)\|^2\cdot\|\mathbf{grad}F_j(q)\|^2} >$$

$$> \frac{1}{4} n^{-\frac{9}{2}} \min_{i,l=1..n} \frac{\|\mathbf{grad} F_l(p)\|^2}{\|\mathbf{grad} F_i(p)\|^2} \geq (4n^{\frac{9}{2}} K^2)^{-1} > 0,$$

що і треба було довести.

Циліндрична поверхня в гільбертовому просторі. Нехай $\{p_1,\ldots,p_n\}$ — л.н.з. система. Тоді $M = \{x \in H : F_j(x) := (x, p_j) - 1 = 0 \ \forall j = 1..n\}$ — перетин циліндричних поверхонь корозмірності 1 з вісями $\{p_j\}$ та радіусами $\left\{\frac{1}{\|p_j\|}\right\}$ — утворює рівномірний рімановий многовид. Дійсно,

$$|F_i'(x)| = \|p_i\|; \frac{|F_i'(x)|}{|F_j'(x)|} = \frac{\|p_i\|}{\|p_j\|}; |F_i''(x)| = 0,$$

тобто необхідні δ і K існують:

$$\delta = \min\{\|p_1\|;\ldots;\|p_n\|\};$$

$$K = \frac{\max\{\|p_1\|;\ldots;\|p_n\|\}}{\min\{\|p_1\|;\ldots;\|p_n\|\}}.$$

Еліптична поверхня в гільбертовому просторі. Нехай $A_1,\ldots,A_n$ — обмежені лінійні оператори, такі, що їх обернені існують і теж є обмеженими, а також $\forall B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i^* A_i : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0 : \operatorname{Ker} B \cap \cap \{x : \|A_1 x\| = \ldots = \|A_n x\|\} = \{0\}$ (невиродженість перетину). Тоді $M = \{x \in H : F_j(x) = \|A_j x\|^2 - 1 = 0 \ \forall j = 1..n\}$ — перетин еліптичних поверхонь корозмірності 1 — утворює рівномірний рімановий многовид. Умова невиродженості дає л.н.з. градієнтів. Доведемо рівномірність

$$|F_i'(x)| = \|A_i^* A_i x\| \geq \|\|A_i^{-1}\|\|^{-1} \cdot \|A_i x\| = \|\|A_i^{-1}\|\|^{-1};$$

$$\frac{|F_i'(x)|}{|F_j'(x)|} = \frac{A_i^* A_i x}{A_j^* A_j x} \leq \frac{\|\|A_i\|\| \cdot \|A_i x\|}{\|\|A_j^{-1}\|\|^{-1} \cdot \|A_j x\|} =$$

$$= \|\|A_i\|\| \cdot \|\|A_j^{-1}\|\|;$$

$$|F_i''(x)| = 2 \cdot \|\|A_i\|\|^2,$$

тобто необхідні δ і K існують:

$$\delta = 2 \cdot \min\{\|\|A_1^{-1}\|\|^{-1};\ldots;\|\|A_n^{-1}\|\|^{-1}\};$$

$$K = \max\{2 \cdot \|\|A_i\|\|^2; \|\|A_i\|\| \cdot \|\|A_j^{-1}\|\| : i, j = 1..n\}.$$

Висновки

У роботі отримані достатні умови метричної повноти нескінченновимірних ріманових многовидів. Одержані умови є перспективними, оскільки реалізуються щонайменш на одному досить широкому класі поверхонь у гільбертовому просторі. В контексті подальших досліджень доцільним вбачається розроблення підходів до розгляду крайових задач на таких нескінченновимірних ріманових многовидах.

Список літератури

1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971. — 343 с.
2. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр V: риманова геометрия. — М.: Факториал, 1998. — 495 с.
3. *Calin O., Chang D.C.* Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds: Applications to Partial Differential Equations. — Boston—Basel—Berlin: Springer Science & Business Media, 2006. — 278 p.
4. *Ivanov A.B.* Behavior of bounded solutions of quasilinear elliptic equations on Riemannian manifolds // Rus. J. Math. Phys. — 2008. — **15**, № 1. — P. 144—144.
5. *Mo X.* The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds // Sci. China. Ser. A: Mathematics. — 2005. — **48**, №1. — P. 115—130.
6. *Grong E.* Sub-Riemannian geometry on infinite-dimensional manifolds // J. Geometric Analysis. — 2015. — **25**, № 4. — P. 2474—2515.
7. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 9. — С. 1169—1178.
8. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967. — 204 с.
9. *Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. — К.: Вища школа, 1989. — 296 с.
10. *Богданский Ю.В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса—Остроградского // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 10. — С. 1299—1313.

References

1. D. Gromol *et al.*, *Riemannian Geometry in General.* Moscow, USSR: Mir, 1971 (in Russian).
2. M.M. Postnikov, *Lectures on Geometry. Semester V: Riemannian Geometry.* Moscow, Russia: Factorial, 1998 (in Russian).
3. O. Calin and D.C. Chang, *Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds: Applications to Partial Differential Equations.* Boston–Basel–Berlin, USA–Switzerland–Germany: Springer Science & Business Media, 2006.
4. A.B. Ivanov, "Behavior of bounded solutions of quasilinear elliptic equations on Riemannian manifolds", *Rus. J. Math. Phys.*, vol. 15, no. 1, pp. 144–144, 2008.
5. X. Mo, "The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds", *Sci. China. Ser. A: Mathematics,* vol. 48, no. 1, pp. 115–130, 2005.
6. E. Grong, "Sub-Riemannian geometry on infinite-dimensional manifolds", *J. Geometric Analysis*, vol. 25, no. 4, pp. 2474–2515, 2015.
7. Yu.V. Bogdansky, "Laplacian with respect to a measure on a Hilbert space and L_2-version of the Dirichlet problem for the Poisson equation", *Ukrayinskyi Matematychnyi Jurnal*, vol. 63, no. 9, pp. 1169–1178, 2011 (in Russian).
8. S. Leng, *An introduction to Differential Manifolds Theory.* Moscow, USSR: Mir, 1967 (in Russian).
9. Yu.L. Daletsky and Ya.I. Belopolskaya, *Stochastic Equations and Differential Geometry.* Kyiv, Ukraine: Vyscha Shkola, 1989 (in Russian).
10. Yu.V. Bogdansky, "Banach manifolds with a bound structure and the Gauss–Ostrogradsky formula", *Ukrayinskyi Matematychnyi Jurnal*, vol. 64, no. 10, pp. 1299–1313, 2012 (in Russian).

О.Ю. Потапенко

НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ РІМАНОВІ МНОГОВИДИ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

Проблематика. Для розв'язку крайових задач на нескінченновимірних ріманових многовидах, зокрема для дослідження задачі Діріхле, суттєвою видається їх метрична повнота. Гарантувати її в загальному випадку не уявляється можливим, а отже, виникає питання наведення її достатніх умов.

Мета дослідження. Метою роботи є наведення достатніх умов метричної повноти нескінченновимірних ріманових многовидів і суттєвих прикладів, що ці умови реалізують.

Методика реалізації. Застосовано базові результати функціонального аналізу та сучасної диференціальної геометрії.

Результати дослідження. Сформулювано і доведено достатні умови метричної повноти нескінченновимірних ріманових многовидів. Доведено, що ці умови реалізуються на поверхнях рівня скінченної корозмірності в гільбертовому просторі з певним обмеженням на перші і другі похідні відповідних функцій.

Висновки. Отримані достатні умови метричної повноти ріманових многовидів – рівномірнсть структури – видаються перспективними, оскільки реалізуються щонайменш на одному досить широкому класі поверхонь в гільбертовому просторі. Доцільним вбачається розроблення підходів до розгляду крайових задач на таких нескінченновимірних ріманових многовидах.

Ключові слова: нескінченновимірний простір; рімановий многовид; диференціальна геометрія.

А.Ю. Потапенко

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ РИМАНОВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАВНОМЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ

Проблематика. Для решения краевых задач на бесконечномерных римановых многообразиях, в частности для исследования задачи Дирихле, существенной видится их метрическая полнота. Гарантировать ее в общем случае не представляется возможным, а следовательно, возникает вопрос приведения ее достаточных условий.

Цель исследования. Целью работы является приведение достаточных условий метрической полноты бесконечномерных римановых многообразий и существенных примеров, которые эти условия реализуют.

Методика реализации. Использованы базовые результаты функционального анализа и современной дифференциальной геометрии.

Результаты исследования. Сформулированы и доказаны достаточные условия метрической полноты бесконечномерных римановых многообразий. Доказано, что данные условия реализуются на поверхностях уровня конечной коразмерности в гильбертовом пространстве с некоторыми ограничениями на первые и вторые производные соответствующих функций.

Выводы. Полученные достаточные условия метрической полноты римановых многообразий – равномерность структуры – выглядят перспективными, поскольку реализуются хотя бы на одном достаточно широком классе поверхностей в гильбертовом пространстве. Целесообразной выглядит разработка подходов к рассмотрению краевых задач на таких бесконечномерных римановых многообразиях.

Ключевые слова: бесконечномерное пространство; риманово многообразие; дифференциальная геометрия.

Рекомендована Радою
Навчально-науковий комплекс
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
7 березня 2016 року