УДК 519.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.67024

Н.В. Прохоренко

Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

СТОХАСТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ГАУССІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ВІНЕРІВСЬКОМУ ПРОЦЕСУ, БРОУНІВСЬКОМУ МОСТУ, ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

Background. We consider the Gaussian process with zero expectation and following covariance function: $R(s,t) = u(s)v(t), s \le t.$ It was found the representation of the equivalent Wiener process for such process (Doob's Transformation Theorem). We consider the representation of the Gaussian process via Wiener process, Brownian bridge and Ornstein–Uhlenbeck process in the case of monotonous function $u(t)/v(t)$.

Objective. The purpose of this paper is to find the criteria of equivalence between Gaussian process and Wiener process and to formulate similar criteria for Brownian bridge and Ornstein–Uhlenbeck process.

Methods. We constructed the system of the functional equations based on properties of Gaussian processes.

Results. Representation of Gaussian process with covariance function $R(s,t)$ to equivalent Wiener process, Brownian bridge, Ornstein–Uhlenbeck process is discovered. Results are formulated in the form of criterion. Cases of decreasing and strictly increasing function $u(t)/v(t)$. are considered.

Conclusions. The received outcomes can be used for research of functionals of the Gaussian processes. For example, to find the probability that Gaussian process crossing certain level. Representation of restriction of the Chentsov random field on polygonal line to equivalent Wiener process allowed finding the exact distribution of the maximum of the Chentsov random field on polygonal lines.

Keywords: Chentsov random field; the distribution of the maximum; Wiener process; Doob's transformation theorem; the Brownian bridge.

Вступ

У роботі розглядаються представлення гауссівських процесів у термінах вінерівського процесу, броунівського моста, процесу Орнштейна–Уленбека, оскільки з-поміж гауссівських процесів вони досліджені найбільше. Деякі з таких представлень дають змогу знаходити невідомі ймовірності перетину гауссівським процесом $Y(t)$ певного криволінійного рівня. Наприклад, у [1–4] перехід від гауссівського процесу до еквівалентного вінерівського процесу дав можливість знайти точний розподіл максимуму поля Ченцова на ламаних.

Найбільш відомим результатом щодо представлення гауссівського процесу через вінерівський є перетворення Дуба [5]. В [6] узагальнили результат Дж.Л. Дуба на випадок гауссівських процесів з більш складною структурою коваріаційної функції.

Попередники не розглядали проблему з іншої сторони, тобто перехід від вінерівського процесу до еквівалентного гауссівського. Також представлення гауссівського процесу через броунівський міст або процес Орнштейна–Уленбека раніше не досліджували. Але ці процеси, нарівні з вінерівським, є об'єктами, які виникають у математичній статистиці, фінансовій математиці тощо. Тому знайдено багато розподілів, пов'язаних із функціоналами від таких процесів. Отже, якщо знайти представлення гауссівських процесів через броунівський міст або процес Орнштейна–Уленбека, то ці результати можна використати для ймовірнісного дослідження гауссівських процесів.

Постановка задачі

Розглянемо гауссівський процес $Y(t)$ з нульовим математичним сподіванням і такою коваріаційною функцією: $R(s,t) = u(s)v(t), s \le t.$ Нехай $u(t)/v(t)$ буде монотонною функцією (зростаючою або спадною). Необхідно знайти представлення процесу $Y(t)$ у термінах вінерівського процесу, броунівського моста або процесу Орнштейна–Уленбека.

Метою роботи є знаходження критерію еквівалентності гауссівського процесу вінерівському і формулювання аналогічних критеріїв для броунівського моста і процесу Орнштейна–Уленбека.

Попередні відомості

Наведемо означення процесів, які використовуються в роботі.

***Означення* 1.** Випадковий процес $\{w(t); t \geq 0\}$ називається вінерівським, якщо:

1) $w(t)$ – гауссівський процес (тобто $\forall n \in \in N\ \forall t_1,...,t_n \geq 0, \forall \lambda_1,...,\lambda_n \in R\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w(t_k)$ – гауссівська випадкова величина);

2) $E[w(t)] = 0$;

3) $E[w(t)w(s)] = \min\{t, s\}$.

Позначимо $D = [0,1]^2$.

***Означення* 2.** Дійсне сепарабельне гауссівське поле $X(s,t)$ називається полем Ченцова, якщо воно задовольняє такі умови:

1) $X(0,t) = X(s,0) = 0$ для всіх $s,t \in [0;1]$;

2) $E[X(s,t)] = 0$ для всіх $(s,t) \in D$;

3) $E[X(s_1,t_1)X(s_2,t_2)] = \min\{s_1,s_2\} \min\{t_1,t_2\}$ для всіх (s_1,t_1) і $(s_2,t_2) \in D$.

***Означення* 3.** Процес $B(t) = w(t) - tw(1)$, $t \in \in [0,1]$, де $w(t)$ – вінерівський процес, називається броунівським мостом.

Неважко підрахувати, що:

1) $E[B(t)] = 0$ для всіх $t \in [0,1]$;

2) $E[B(s)B(t)] = s(1-t)$ для всіх $0 \leq s \leq t \leq 1$.

***Означення* 4.** Процес $V(t) = e^{-\beta t} w(\alpha e^{2\beta t})$, де $\alpha, \beta > 0$ і $w(t)$ – вінерівський процес, називається процесом Орнштейна–Уленбека.

Добре відомо, що

1) $E[V(t)] = 0$ для всіх $t \geq 0$;

2) $E[V(s)V(t)] = \alpha e^{-\beta(t-s)}$ для всіх $0 \leq s \leq t$.

***Означення* 5.** Стохастичні процеси $X(t)$ і $Y(t)$ називаються стохастично еквівалентними, якщо при довільному $t \in T$ виконується

$$P(X(t) = Y(t)) = 1.$$

Теорема 1 (перетворення Дуба) [5]. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес із $E[Y(t)] = 0$, $\forall t$, і такою коваріаційною функцією:

$$R(s,t) = u(s)v(t),\ s \leq t. \tag{1}$$

Якщо функція $a(t) = u(t)/v(t)$ є неперервною і строго монотонно зростаючою з оберненою функцією $a^{-1}(t)$, то процес $Y(a^{-1}(t))/v(a^{-1}(t))$ стохастично еквівалентний вінерівському процесу $w(t)$.

С. Парком було отримано декілька узагальнень теореми 1.

Теорема 2 (С. Парка) [6]. Якщо коваріаційна функція гауссівського процесу $Y(t)$ задовольняє (1) і якщо функція $v(t)/u(t)$ не зростає, то $Y(t) = u(t)w[v(t)/u(t)] + \mu(t)$, де $\mu(t)$ – математичне сподівання процесу $Y(t)$.

Хоча теореми 1 і 2 є дуже корисними, вони мають недолік, зумовлений необхідністю припущення монотонності функції $v(t)/u(t)$. У наступній теоремі С. Парк дещо послабив цю умову.

Теорема 3 [6]. Якщо $Y(t)$ – гауссівський процес з коваріаційною функцією

$$R(s,t) = u(s)v(t), u(s)/v(s) \leq u(t)/v(t)$$

для s, t з деякого інтервалу, то

$$Y(t) = v(t)w[u(t)/v(t)] + \mu(t) = u(t)w[v(t)/u(t)] + \mu(t).$$

Ще одним узагальненням теореми 1 є такий результат.

Теорема 4 [6]. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес із коваріаційною функцією

$$R(s,t) = \sum_{1}^{\infty} u_k^*(s) v_k^*(t),$$

де

$$u_k^*(s)v_k^*(t) = \begin{cases} u_k(s)v_k(t), & u_k(s)/v_k(s) \leq u_k(t)/v_k(t), \\ u_k(t)v_k(s), & u_k(s)/v_k(s) > u_k(t)/v_k(t) \end{cases}$$

для кожного $k = 1, 2, \ldots$. Тоді

$$Y(t) = \sum_{1}^{\infty} v_k(t) w_k[u_k(t)/v_k(t)] + \mu(t) =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} u_k(t) w_k[v_k(t)/u_k(t)] + \mu(t),$$

де $\{w_k(t)\}$ – послідовність незалежних вінерівських процесів.

У наступному розділі ми побудуємо критерій еквівалентності між гауссівським і вінерівським процесами.

Основні результати

Вінерівський процес. Отже, Дж. Л. Дубом і С. Парком було знайдено представлення гауссівського процесу через вінерівський. У цій роботі ми побудуємо гауссівський процес, який буде еквівалентний вінерівському і виражатиметься через заданий гауссівський процес, коваріаційна функція якого має певні властивості.

Теорема 5. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес з $E[Y(t)]=0$ і такою коваріаційною функцією: $E[Y(s)Y(t)]=u(s)v(t), s\le t$. Причому існує функція $\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}$. Припустимо, що $\varphi(t)$ – неперервна строго монотонно зростаюча функція, $\eta(t)$ – неперервна функція. Процес $\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і вінерівський процес $w(t)$ є стохастично еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t), \eta(t)=cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right),$$

де $c\neq 0$.

Доведення.

1) **Достатність.** Нехай

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t),\quad \eta(t)=cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right).$$

Позначимо $Y_1(t)=\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$, тоді

$$E[Y_1(t)]=E\left[\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}\right]=\frac{E[Y(\varphi(t)]}{\eta(t)}=0.$$

Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$, маємо

$$E[Y_1(t)Y_1(s)]=$$

$$=E\left[\frac{Y\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right)}{cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right)}\frac{Y\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2s)\right)}{cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2s)\right)}\right]=$$

$$=\frac{u\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2s)\right)v\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right)}{cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right)cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2s)\right)}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{u}{v}\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2s)\right)=s.$$

Оскільки $w(t)$ – гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням, а $E[w(s)w(t)]=$ $=\min\{s,t\}$, то вінерівський процес і процес $\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ – стохастично еквівалентні.

2) **Необхідність.** Нехай процес $Y_1(t)=\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і вінерівський процес $w(t)$ є стохастично еквівалентними. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$, маємо

$$\frac{E[Y(\varphi(s))Y(\varphi(t))]}{\eta(s)\eta(t)}=\frac{u(\varphi(s))v(\varphi(t))}{\eta(s)\eta(t)},$$

оскільки $\varphi(t)$ – строго монотонно зростаюча функція. Звідси отримаємо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases}\frac{u(\varphi(t))}{\eta(t)}=ct,\\ \frac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}=\frac{1}{c}.\end{cases}$$

Розділивши перше рівняння на друге, отримаємо:

$$\frac{u}{v}(\varphi(t))=c^2t.$$

Звідси

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t).$$

З другого рівняння знайдемо

$$\eta(t)=cv(\varphi(t))=cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2t)\right).$$

Аналогічний результат можна отримати, якщо припустити, що $\varphi(t)$ – строго монотонно спадна функція.

Теорема 6. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес з $E[Y(t)]=0$ і такою коваріаційною функцією: $E[Y(s)Y(t)]=u(s)v(t), s\le t$. Причому існує функція $\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}$. Припустимо, що $\varphi(t)$ – неперервна строго монотонно спадна функція, $\eta(t)$ – неперервна функція. Процес $\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і вінерівський процес $w(t)$ є стохастично еквівалентними тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t)=\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t),\quad \eta(t)=cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right),$$

де $c\neq 0$.

Д о в е д е н н я.

1) **Достатність.** Нехай

$$\varphi(t)=\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t),\ \ \eta(t)=cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right).$$

Позначимо $Y_1(t)=\dfrac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$, тоді

$$E[Y_1(t)]=E\left[\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}\right]=\frac{E[Y(\varphi(t)]}{\eta(t)}=0.$$

Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$ маємо

$$E[Y_1(t)Y_1(s)]=$$

$$=E\left[\frac{Y\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right)}{cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right)}\frac{Y\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2s)\right)}{cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2s)\right)}\right]=$$

$$=\frac{v\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2s)\right)u\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right)}{cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right)cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2s)\right)}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{v}{u}\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2s)\right)=s.$$

Оскільки $E[w(t)]=0$ і $E[w(s)w(t)]=0$, то вінерівський процес і процес $\dfrac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ – стохастично еквівалентні.

2) **Необхідність.** Нехай процес $Y_1(t)=\dfrac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і вінерівський процес $w(t)$ є стохастично еквівалентними. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$, маємо

$$\frac{E[Y(\varphi(s))Y(\varphi(t))]}{\eta(s)\eta(t)}=\frac{u(\varphi(t))v(\varphi(s))}{\eta(s)\eta(t)},$$

оскільки $\varphi(t)$ – строго монотонно спадна функція. Звідси отримаємо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{u(\varphi(t))}{\eta(t)}=\dfrac{1}{c},\\[2mm] \dfrac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}=ct\ .\end{cases}$$

Розділивши друге рівняння на перше, отримаємо:

$$\frac{v}{u}(\varphi(t))=c^2t.$$

Звідси

$$\varphi(t)=\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t).$$

З першого рівняння знайдемо:

$$\eta(t)=cu(\varphi(t))=cu\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{-1}(c^2t)\right).$$

Броунівський міст. Якщо розглядати еквівалентність між гауссівським процесом і броунівським мостом, то критерій 5 можна переписати в такому вигляді.

Теорема 7. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес з $E[Y(t)]=0$ і такою коваріаційною функцією: $E[Y(s)Y(t)]=u(s)v(t)$ для всіх $0\le s\le t\le 1$. Нехай існує функція $\left(\dfrac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}$, де $c\ne 0$. Припустимо, що $\varphi(t)$ є неперервною строго монотонно зростаючою функцією, а $\eta(t)$ – неперервна функція. Процес $\dfrac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і броунівський міст є стохастично еквівалентними процесами тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t),$$

$$\eta(t)=\frac{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{c}.$$

Д о в е д е н н я.

1) **Достатність.** Нехай

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t),$$

$$\eta(t)=\frac{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{c}.$$

Позначимо $Y_1(t)=\dfrac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$ маємо

$$E[Y_1(t)Y_1(s)]=$$

$$=E\left[\frac{Y\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{\frac{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{c}}\frac{Y\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(s)\right)}{\frac{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(s)\right)}{c}}\right]=$$

$$=\frac{c^2u\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(s)\right)v\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(s)\right)(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}=$$

$$=\frac{u}{c^2v+u}\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(s)\right)\frac{c^2v}{c^2v+u}\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)=$$

$$=s(1-t).$$

Остання рівність виконується, оскільки

$$\frac{c^2v}{c^2v+u}=1-\frac{u}{c^2v+u}\,.$$

Порівнявши математичне сподівання і коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$ і броунівського моста, можемо зробити висновок, що процеси стохастично еквівалентні.

2) **Необхідність.** Нехай процес $Y_1(t)=\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і броунівський міст $B(t)$ є стохастично еквівалентними. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s\le t$ маємо

$$\frac{E[Y(\varphi(s))Y(\varphi(t))]}{\eta(s)\eta(t)}=\frac{u(\varphi(s))v(\varphi(t))}{\eta(s)\eta(t)}\,,$$

оскільки $\varphi(t)$ – строго монотонно зростаюча функція. Звідси отримаємо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{u(\varphi(t))}{\eta(t)}=ct\,,\\[2mm] \dfrac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}=\dfrac{1-t}{c}\,.\end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння t, отримаємо

$$\frac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}=\frac{1}{c}-\frac{u(\varphi(t))}{c^2\eta(t)}\,.$$

$$(c^2v+u)(\varphi(t))=c\eta(t)\,.$$

Далі

$$\frac{u}{c^2v+u}(\varphi(t))=t,$$

звідки

$$\varphi(t)=\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)$$

і

$$\eta(t)=\frac{(c^2v+u)\left(\left(\frac{u}{c^2v+u}\right)^{-1}(t)\right)}{c}\,.$$

Аналогічний результат запишемо для випадку спадної функції $\varphi(t)$.

Теорема 8. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес з $E[Y(t)]=0$ і такою коваріаційною функцією: $E[Y(s)Y(t)]=u(s)v(t)$ для всіх $0\le s\le t\le 1$. Нехай існує функція $\left(\frac{v}{c^2u+v}\right)^{-1}$, де $c\ne 0$. Припустимо, що $\varphi(t)$ є неперервною строго монотонно спадною функцією, а $\eta(t)$ – неперервна функція. Процес $\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і броунівський міст є стохастично еквівалентними процесами тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t)=\left(\frac{v}{c^2u+v}\right)^{-1}(t)\,,$$

$$\eta(t)=\frac{(c^2u+v)\left(\left(\frac{v}{c^2u+v}\right)^{-1}(t)\right)}{c}\,.$$

Доведення.

1) **Достатність.** Повторює доведення теореми 7.

2) **Необхідність.** Аналогічно, як у теоремі 7, для процесу запишемо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}=ct\,,\\[2mm] \dfrac{u(\varphi(t))}{\eta(t)}=\dfrac{1-t}{c}\,.\end{cases}$$

Виразивши t, матимемо

$$\frac{c^2u(\varphi(t))}{\eta(t)}=c-\frac{v(\varphi(t))}{\eta(t)}\,,$$

$$(c^2u+v)((\varphi(t))=c\eta(t).$$

Далі

$$\frac{v}{c^2u+v}(\varphi(t)) = t,$$

звідки

$$\varphi(t) = \left(\frac{v}{c^2u+v}\right)^{-1}(t)$$

і

$$\eta(t) = \frac{(c^2u+v)\left(\left(\frac{v}{c^2u+v}\right)^{-1}(t)\right)}{c}.$$

Процес Орнштейна–Уленбека. Аналогічно можна отримати критерій еквівалентності для процесу Орнштейна–Уленбека.

Теорема 9. Нехай $Y(t)$ – гауссівський процес з $E[Y(t)]=0$ і такою коваріаційною функцією: $E[Y(s)Y(t)] = u(s)v(t)$, $0 \le s \le t$. Нехай існує функція $\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}$. Припустимо, що $\varphi(t)$ є неперервною строго монотонно зростаючою функцією, а $\eta(t)$ – неперервна функція. Процес $\frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і процес Орнштейна–Уленбека $V(t)$ є стохастично еквівалентними процесами тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t) = \left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t}),\quad \eta(t) = ce^{\beta t}v\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t}),$$

де $c \neq 0$.

Доведення.

1) **Достатність.** Нехай

$$\varphi(t) = \left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t}),$$

$$\eta(t) = ce^{\beta t}v\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t})\right).$$

Позначимо $Y_1(t) = \frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s \le t$ маємо

$$E[Y_1(t)Y_1(s)] =$$

$$= E\left[\frac{Y\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t})\right)}{ce^{\beta t}v\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t})\right)}\frac{Y\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta s})\right)}{ce^{\beta s}v\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta s})\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2e^{\beta s}e^{\beta t}}\cdot\frac{u}{v}\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta s})\right) =$$

$$= \frac{\alpha c^2 e^{2\beta s}}{c^2 e^{\beta s}e^{\beta t}} = \alpha e^{-\beta(t-s)}.$$

Порівнявши математичне сподівання і коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$ і процесу Орнштейна–Уленбека, можемо зробити висновок, що процеси стохастично еквівалентні.

2) **Необхідність.** Нехай процес $Y_1(t) = \frac{Y(\varphi(t))}{\eta(t)}$ і процес Орнштейна–Уленбека $V(t)$ є стохастично еквівалентними. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $Y_1(t)$. Для $s \le t$ маємо

$$\frac{E[Y(\varphi(s))Y(\varphi(t))]}{\eta(s)\eta(t)} = \frac{u(\varphi(s))v(\varphi(t))}{\eta(s)\eta(t)}.$$

Порівнявши з коваріаційною функцією процесу Орнштейна–Уленбека, отримаємо систему функціональних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{u(\varphi(t))}{\eta(t)} = \alpha c e^{\beta t}, \\ \frac{v(\varphi(t))}{\eta(t)} = \frac{e^{-\beta t}}{c}. \end{cases}$$

Поділивши перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{u}{v}(\varphi(t)) = \alpha c^2 e^{2\beta t}.$$

Звідси

$$\varphi(t) = \left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t})$$

і

$$\eta(t) = ce^{\beta t}v\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(\alpha c^2 e^{2\beta t})\right).$$

Приклади

***Приклад* 1.** Розглянемо поле Ченцова $X(s,t)$, $s,t \in [0,1]$, і криву $L: t = \sqrt{1-s^2}$ (рис. 1). Потрібно знайти

$$P\left\{\sup_{(s,t)\in L} X(s,t) < x\right\}, \tag{2}$$

де $x > 0$.

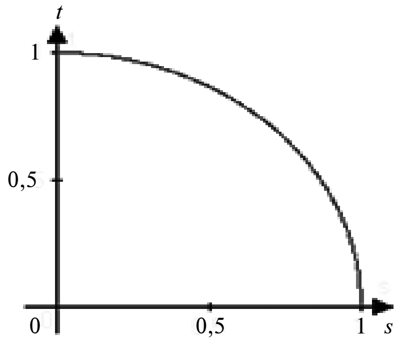

Рис. 1. Крива L

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо $X_L(s)$ звуження поля $X(s,t)$ на криву L, тоді $X_L(s) = X(s,\sqrt{1-s^2})$. Знайдемо коваріаційну функцію процесу $X_L(s)$. Для $0 \le s \le t \le 1$ маємо

$$E[X_L(s)X_L(t)] =$$
$$E[X(s,\sqrt{1-s^2})X(t,\sqrt{1-t^2})] = s\sqrt{1-t^2} .$$

Отже, $u(s) = s$, $v(t) = \sqrt{1-t^2}$. З теореми 5 отримуємо, що

$$\varphi(t) = \left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2 t), \quad \eta(t) = cv\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(c^2 t)\right).$$

Оскільки $\frac{u}{v}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, а $\left(\frac{u}{v}\right)^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, то

$$\varphi(t) = \frac{c^2 t}{\sqrt{c^4 t^2 + 1}}, \quad \eta(t) = \frac{c}{\sqrt{c^4 t^2 + 1}} .$$

Покладемо $c = 1$. Тоді процес $X_L\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\sqrt{t^2+1}$ стохастично еквівалентний вінерівському процесу. Звідси випливає, що (5) можна звести до такої задачі:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,\infty)} (w(t) - x\sqrt{1+t^2}) < 0\right\}.$$

***Приклад* 2.** Розглянемо поле Ченцова $X(s,t)$, $s,t \in [0,1]$, і ламану

$$L : t = \left(-\frac{(1-y_1)s}{x_1} + 1\right) I_{[0,x_1]}(s) +$$
$$+\left(-\frac{y_1 s}{1-x_1} + \frac{y_1}{1-x_1}\right) I_{(x_1,1]}(s) ,$$

де точка зламу така, що $y_1 \ne x_1^2$ (рис. 2).

Потрібно звести звуження поля Ченцова на ламану до процесу, який буде еквівалентний броунівському мосту.

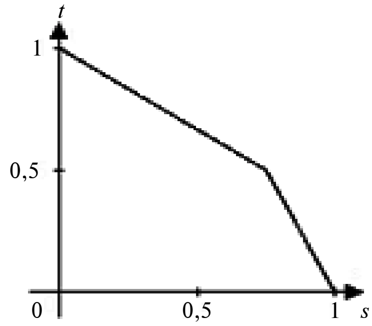

Рис. 2. Ламана L

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо $X_L(s)$ звуження поля $X(s,t)$ на L, тоді

$$X_L(s) = X\left(s, \left(-\frac{(1-y_1)s}{x_1} + 1\right) I_{[0,x_1]}(s) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{y_1 s}{1-x_1} + \frac{y_1}{1-x_1}\right) I_{(x_1,1]}(s)\right).$$

Знайдемо коваріаційну функцію процесу $X_L(s)$. Для $0 \le s \le t \le 1$ маємо

$$E\,[X_L(s)X_L(t)] = s\left(\left(-\frac{(1-y_1)t}{x_1} + 1\right) I_{[0,x_1]}(t) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{y_1 t}{1-x_1} + \frac{y_1}{1-x_1}\right) I_{(x_1,1]}(t)\right).$$

Тому

$$u(s) = s, \quad v(t) = \left(-\frac{(1-y_1)s}{x_1} + 1\right) I_{[0,x_1]}(s) +$$
$$+ \left(-\frac{y_1 s}{1-x_1} + \frac{y_1}{1-x_1}\right) I_{(x_1,1]}(s) .$$

З теореми 7 при $c = 1$ випливає, що

$$\varphi(t) = \left(\frac{u}{v+u}\right)^{-1}(t), \quad \eta(t) = (v+u)\left(\left(\frac{u}{v+u}\right)^{-1}(t)\right).$$

Підставивши $u(s)$ і $v(t)$, отримаємо

$$\varphi(t) = \frac{x_1 t}{x_1 - (x_1 + y_1 - 1)t} I_{\left[0, \frac{x_1}{x_1+y_1}\right)}(t) +$$
$$+ \frac{y_1 t}{1 - x_1 - (1-y_1)t} I_{\left[\frac{x_1}{x_1+y_1}, \infty\right)}(t) ,$$

$$\eta(t) = \frac{x_1}{x_1 - (x_1 + y_1 - 1)t} I_{\left[0, \frac{x_1}{x_1 + y_1}\right)}(t) + \frac{y_1(1 - x_1)}{1 - x_1 + (x_1 + y_1 - 1)t} I_{\left[\frac{x_1}{x_1 + y_1}, \infty\right)}(t).$$

Тому

$$Y(t) = X_L \left(\frac{x_1 t}{x_1 - (x_1 + y_1 - 1)t} \right) \times \left(1 - \frac{(x_1 + y_1 - 1)t}{x_1} \right) I_{\left[0, \frac{x_1}{x_1 + y_1}\right)}(t) + X_L \left(\frac{y_1 t}{1 - x_1 - (1 - y_1)t} \right) \times \left(\frac{1}{y_1} + \frac{(x_1 + y_1 - 1)t}{y_1(1 - x_1)} \right) I_{\left[\frac{x_1}{x_1 + y_1}, \infty\right)}(t)$$

і броунівський міст стохастично еквівалентні.

Висновки

У [5, 6] було знайдено представлення гауссівського процесу через вінерівський.

Дж.Л. Дуб розглядав цю задачу, коли функція $a(t) = u(t)/v(t)$ була монотонно зростаючою. С. Парк досліджував представлення гауссівських процесів через вінерівський у випадку, коли $a(t)$ була монотонно спадною або змінювала монотонність на певних інтервалах.

Ми узагальнили ці результати, отримавши критерії еквівалентності гауссівського процесу вінерівському процесу, броунівському мосту, процесу Орнштейна–Уленбека. Було розглянуто випадки монотонно зростаючої і монотонно спадної функції $a(t)$ для цих процесів.

Одержані результати дають змогу знаходити невідомі розподіли функціоналів від гауссівських процесів, використовуючи представлення гауссівського процесу через вінерівский процес, броунівський міст або процес Орнштейна–Уленбека. Наприклад, в [1–4] представлення звуження поля Ченцова на ламану через вінерівський процес дало змогу знайти невідомий розподіл максимуму поля Ченцова на ламаних із кількома точками зламу.

У майбутньому аналогічну задачу можна розглянути для випадкових полів. Тобто можна отримати критерії еквівалентності гауссівського поля полю Ченцова або броунівській подушці.

Список літератури

1. *Klesov O.I., Kruglova N.V.* The distribution of a functional of theWiener process and its application to the Brownian sheet // Statistics. – 2011. – **45**, № 1. – P. 19–26.
2. *Клесов І.І.* Про ймовірність досягнення криволінійного рівня вінерівським полем // Теор. ймовірностей та мат. статистика. – 1995. – Вип. 51. – С. 63–66.
3. *Клесов О.І., Круглова Н.В.* Розподіл функціоналів типу максимуму для двопараметричного поля Ченцова // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 4. – С. 136–141.
4. *Kruglova N.V.* Distribution of the maximum of the Chentsov random field // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – № 1. – P. 76–81.
5. *Doob J.L.* Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems // Ann. Math. Statist. – 1949. – **20**. – P. 393–403.
6. *Park C.* Representations of Gaussian processes by Wiener processes // Pacific J. Math. – 1981. – **94**, № 2. – P. 407–415.

References

1. O.I. Klesov and N.V. Kruglova, "The distribution of a functional of theWiener process and its application to the Brownian sheet", *Statistics*, vol. 45, no. 1, pp. 19–26, 2011.
2. I.I. Klesov, "On the probability of attainment of a curvilinear level by a Wiener field", *Teoriia Ymovirnostei ta Matematychna Statystyka*, no. 51, pp. 63–66, 1995 (in Ukrainian).
3. O.I. Klesov and N.V. Kruglova, "The distribution of a functional of the maximum type for the two-parameter Chentsov random field", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 136–141, 2007 (in Ukrainian).
4. N.V. Kruglova, "Distribution of the maximum of the Chentsov random field", *Theory of Stochastic Processes*, no. 1, pp. 76–81, 2008.
5. J.L. Doob, "Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems", *Ann. Math. Statist*, no. 20, pp. 393–403, 1949.
6. C. Park, "Representations of Gaussian processes by Wiener processes", *Pacific J. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 407–415, 1981.

Н.В. Прохоренко

СТОХАСТИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ГАУССІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ВІНЕРІВСЬКОМУ ПРОЦЕСУ, БРОУНІВСЬКОМУ МОСТУ, ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

Проблематика. Розглядається гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням і коваріаційною функцією $R(s,t) = u(s)v(t), s \le t.$ Для такого процесу знайдено представлення через еквівалентний вінерівський процес (перетворення Дуба). Ми розглядаємо представлення гауссівського процесу через вінерівський процес, броунівський міст і процес Орнштейна–Уленбека у випадку монотонної функції $u(t)/v(t)$.

Мета дослідження. Знаходження критерію еквівалентності гауссівського процесу вінерівському і формулювання аналогічних критеріїв для броунівського моста і процесу Орнштейна–Уленбека.

Методика реалізації. Побудовано систему функціональних рівнянь на основі властивостей гауссівських процесів.

Результати дослідження. Знайдено представлення гауссівського процесу з коваріаційною функцією $R(s,t)$ через вінерівский процес, броунівський міст, процес Орнштейна–Уленбека. Результати сформульовані у вигляді критерію. Розглянуто випадки монотонно спадної і монотонно зростаючої функції $u(t)/v(t)$.

Висновки. Одержані результати можна використовувати для дослідження функціоналів від гауссівських процесів, наприклад для знаходження ймовірності перетину гауссівським процесом певного рівня. Представлення звуження поля Ченцова на ламану через вінерівський процес дало змогу знайти точний розподіл максимуму поля Ченцова по ламаних.

Ключові слова: поле Ченцова; розподіл максимуму; вінерівський процес; перетворення Дуба; броунівський міст.

Н.В. Прохоренко

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА ВИНЕРОВСКОМУ ПРОЦЕССУ, БРОУНОВСКОМУ МОСТУ, ПРОЦЕССУ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

Проблематика. В работе рассмотрен гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $R(s,t) = u(s)v(t), s \le t.$ Для такого процесса найдено представление через эквивалентный винеровский процесс (преобразование Дуба). Мы рассматриваем представление гауссовского процесса через винеровский процесс, броуновский мост и процесс Орнштейна–Уленбека в случае монотонной функции $u(t)/v(t)$.

Цель исследования. Нахождение критерия эквивалентности гауссовского процесса винеровскому и формулирование аналогичных критериев для броуновского моста и процесса Орнштейна–Уленбека.

Методика реализации. Построена система функциональных уравнений на основе свойств гауссовских процессов.

Результаты исследования. Найдено представление гауссовского процесса с ковариационной функцией $R(s,t)$ через винеровский процесс, броуновский мост, процесс Орнштейна–Уленбека. Результаты сформулированы в виде критерия. Рассмотрены случаи монотонно убывающей и монотонно возрастающей функции $u(t)/v(t)$.

Выводы. Полученные результаты можно использовать для исследования функционалов от гауссовских процессов, например для нахождения вероятности пересечения гауссовским процессом определенного уровня. Представление сужение поля Ченцова на ломаную через винеровский процесс позволило найти точное распределение максимума поля Ченцова по ломаных.

Ключевые слова: поле Ченцова; распределение максимума; винеровский процесс; преобразования Дуба; броуновский мост.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
07 березня 2016 року