УДК 519.8

О.Є. Кірік

Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ПІДХІД ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ БЛОЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗІ ЗВ’ЯЗУЮЧИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Background. Non-linear optimization problems for the operation of large space or functionally distributed systems with independently functioning subsystems and restrictions on some of the common resources are considered.

Objective. The aim is to build an effective approach to solving nonlinear optimization problems of block structure with coupling constraints on the basis of the combination of approximating nonlinear optimization methods and decomposition techniques.

Methods. The three-step iterative scheme has been proposed. On the upper level the original problem is replaced by a sequence of approximating problems with additively-separable objective function and linear constraints. On the second level, coordinating problems, which are formed by the information received at the lowest level from local block problems, are solved.

Results. The algorithm, which is a combination of the linearization method of B.Pshenichniy and the dual decomposition, has been built. The structure of the dual coordination problem has been described. Estimation of the convergence rate has been carried out.

Conclusions. The proposed approach and the algorithm constructed based on it can be applied to a wide range of problems associated with optimal allocation of limited resources in the large block-structured systems.

Keywords: resource distribution problems; optimization models; non-linear programming methods; decomposition algorithms.

Вступ

Підприємства в складі великого виробничого об’єднання у процесі виробництва використовують свої внутрішні локальні ресурси. Крім того, вони можуть бути пов’язані між собою, спільно споживаючи деякі лімітовані ресурси, наприклад сировину. Виробничий процес, що відбувається у дискретному часі, підпорядковується низці обмежень, частина з яких належать до певних проміжків часу, а інші — до всього періоду виробництва. У моделях, що описують такі процеси, загальна система обмежень складається з двох підмножин: частина обмежень належить до локальних виробництв, а інша, що називається зв’язуючими обмеженнями, відповідає всьому виробничому процесу або періоду.

Ефективним підходом до розв’язання задач такого типу є використання прийомів декомпозиції, тобто зведення вихідної задачі до спеціальним чином побудованої координуючої задачі та набору локальних підзадач.

Першими об’єктами такого типу були лінійні блочні задачі розподілу ресурсів [1, 2]. Задача розділялася на підзадачі через встановлення цін на загальні ресурси та додавання затрат на ці ресурси до цільової функції кожної підзадачі. Ціни обчислювалися як двоїсті змінні до координуючої задачі. Координуюча задача знаходила оптимальний розв’язок як опуклу комбінацію пропозицій, що виробили підзадачі, а також визначала нові ціни, які спрямовувалися до підзадач. У задачах лінійного програмування розв’язки локальних підзадач є крайніми точками множин обмежень. Складові ж оптимального вектора вихідної задачі, що відповідають поділу обмежень на підгрупи або блоки, можуть виявитися внутрішніми точками відповідних підсистем обмежень. Внутрішні точки знаходяться тільки як комбінація різних крайніх точок, тому в лінійних задачах можливо реалізувати лише часткову децентралізацію прийняття рішень.

У задачах з нелінійними цільовими функціями можуть бути реалізовані умови повної децентралізації, тобто оптимальна точка знаходиться безпосередньо при розв’язанні локальних підзадач. Але в нелінійних задачах суттєвою умовою виступає адитивна сепарабельність функцій, що визначають критерій та обмеження, а складові цільової функції координуючої задачі у загальному випадку визначені на обмежених множинах й іноді потребують певних процедур регуляризації вихідної задачі [3—5].

У роботі пропонується застосовувати декомпозиційні прийоми не до вихідної задачі нелінійного програмування, а до допоміжної задачі з адитивно-сепарабельними функціями, що отримується за допомогою методів апроксимації.

Зручним методом замінити нелінійну задачу набором певним чином побудованих задач квадратичного програмування є метод лінеаризації Б.М. Пшеничного [6]. Основна ідея цього методу полягає у заміні нелінійної задачі послідовністю лінеаризованих задач, доповнених квадратичним штрафом за великі ухилення аргумента. В [7] досліджувалося застосування цього методу до задач розподілу потоків у мережах, що є певним класом транспортних задач.

У нашій роботі буде розглянуто особливості застосування методу лінеаризації до нелінійних блочних задач зі зв'язуючими обмеженнями. Відзначимо, що блочна структура зі зв'язуючими обмеженнями є типовою для різних транспортно-виробничих задач, у яких підприємства-постачальники пов'язані обмеженнями на загальні ресурси та задоволення споживчого попиту.

Постановка задачі

Метою роботи є побудова ефективного підходу до розв'язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв'язуючими обмеженнями на основі застосування комбінації апроксимуючих методів нелінійної оптимізації та прийомів декомпозиції.

Математичні моделі й апроксимуючі методи

Нехай маємо нелінійну задачу гладкої умовної оптимізації

$$\min_{x\in M} f_0(x),\ M=\{x\in R^n : f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m\}\,. \quad (1)$$

За наявності обмежень-рівностей вони представляються еквівалентною парою відповідних нерівностей.

Загальна схема апроксимуючих методів умовної оптимізації може бути представлена у формі

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k p^k,\ k=0,1,\dots, \quad (2)$$

де $\alpha_k>0$, а $p^k=p(x^k)$, $p^k\in R^n$, – розв'язок допоміжної апроксимуючої задачі з лінійними обмеженнями,

$$f_0(x^k)+\langle f_0'(x^k),p\rangle+\frac{1}{2}\langle D_k p,p\rangle\to\min, \quad (3)$$

$$f_i(x^k)+\langle f_i'(x^k),p\rangle\le 0,\ i=1,\dots,m.$$

У методі лінеаризації Б.М. Пшеничного $D_k=E$ – це одинична $n\times n$-матриця, а крок α_k на кожному кроці процесу (2) обчислюється як найбільше зі значень $\alpha=2^{-t}$, $t=0,1,\dots$, при якому виконується нерівність

$$\bar f(x^k+\alpha p^k,\Lambda)\le \bar f(x^k,\Lambda)-\varepsilon\alpha\|p^k\|^2,\quad \varepsilon\in(0,1), \quad (4)$$

де $\bar f(x,\Lambda)$ – недиференційована штрафна функція:

$$\bar f(x,\Lambda)\equiv f_0(x)+\Lambda F(x),\ \Lambda>0,$$

$$F(x)=\max\{0,f_1(x),\dots,f_m(x)\}.$$

Коефіцієнт штрафу $\Lambda>0$ мажорує множники Лагранжа λ^k задачі (3):

$$\Lambda\ge\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k,\ k=0,1,\dots\ , \quad (5)$$

причому виконання умови (5) гарантує, що нерівність (4) виконається після скінченного числа поділів одиниці навпіл. Крім того, при формуванні допоміжної задачі в неї можна включати лише найбільш істотні обмеження. Правила зменшення кількості обмежень викладені в [6].

Якщо вихідна задача (1) має вигляд блочної зі зв'язуючими обмеженнями, то апроксимуючу задачу квадратичного програмування з Q блоками у матричному вигляді можна представити таким чином:

$$F(p)\equiv\sum_{i=1}^{Q}F_i(p_i)\to\min,$$

$$\sum_{i=1}^{Q}B_i p_i+b_0\le 0, \quad (6)$$

$$A_i p_i+b_i\le 0,\ i=1,2,\dots,Q,$$

де $F_i(p_i)=\langle c_i,p_i\rangle+\frac{1}{2}\|p_i\|^2$, $c_i\in R^{n_i}$, $p_i\in R^{n_i}$, $b_i\in R^{m_i}$, A_i та B_i – матриці розмірностей відповідно $(m_i\times n_i)$ та $(m_0\times n_i)$, $\sum_{i=1}^{Q}n_i=n$, $\sum_{i=1}^{Q}m_i=$ $=m$, m_0 – кількість зв'язуючих обмежень.

Задача (6) розв'язується багаторазово і змінюється від кроку до кроку процесу (2), але ми опускаємо крокові індекси, щоб не обтяжувати формули додатковими позначеннями.

Нашею задачею є побудова алгоритму розв’язання задачі (6), в якому врахована блочна структура обмежень і є можливість незалежного, а за необхідності і паралельного, розв’язання блочних задач.

Формування двоїстої координуючої та локальних задач

Нехай $u \geq 0$ — вектор двоїстих змінних, що відповідають зв’язуючим обмеженням

$$\sum_{i=1}^{Q} B_i p_i + b_0 \leq 0 . \quad (7)$$

Для множини, що описується рештою нерівностей, введемо позначення

$$\Omega = \{p = \{p_1, p_2, ..., p_Q\} : A_i p_i + b_i \leq 0,$$
$$i = 1, 2, ..., Q\}.$$

Побудуємо для задачі (6) функцію Лагранжа:

$$L(p,u) = \sum_{i=1}^{Q} F_i(p_i) + u^* \left(\sum_{i=1}^{Q} B_i p_i + b_0 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{Q} \left[(c_i^* + u^* B_i) p_i + \frac{1}{2} \| p_i \| \right] + u^* b_0 . \quad (8)$$

Якщо точка $\{\overline{p}, \overline{u}\}$, де $\overline{u} \geq 0$, $\overline{p} \in \Omega$, є сідловою точкою функції Лагранжа (8), то $p = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_Q\}$ є розв’язком вихідної задачі (6) [8].

Розв’язання задачі (6) можна замінити розв’язанням двоїстої задачі такого вигляду:

$$\max_{u \geq 0} \min_{p \in \Omega} L(p,u), \quad (9)$$

розмірність якої визначається кількістю зв’язуючих обмежень (7).

Функція L є адитивно-сепарабельною по p_i при фіксованому u, тобто

$$L(p,u) = \sum_{i=1}^{Q} L_i(p_i, u) + u^* b_0 ,$$

де $L_i(p_i, u) = (c_i^* + u^* B_i) p_i + \frac{1}{2} \| p_i \|$.

Це означає, що мінімум $L(p,u)$ можна знайти незалежним розв’язанням Q задач

$$\min \{L_i(p_i, u) : A_i p_i + b_i \leq 0\} , \quad (10)$$

$$i = 1, 2, ..., Q .$$

Позначимо $\Omega_i = \{p_i : A_i p_i + b_i \leq 0\}$, $i = 1, 2, ..., Q$, — допустимі області задач (10), $p_i(\overline{u})$ — результат розв’язання i-ї задачі при $u = \overline{u}$; $v_i(\overline{u}) \geq 0$ — вектор множників Лагранжа цієї задачі.

Нехай $\overline{p}_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, ..., Q$, — довільні допустимі точки. Виділимо серед обмежень, що утворюють множини Ω_i ті, що в точках $\overline{p}_i$ задовольняються як рівності. Позначимо

$$J_i = J_i(\overline{p}_i) = \{j : A_i^j \overline{p}_i + b_i^j = 0, j = 1, ..., m_i\} .$$

Систему активних рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$A_{J_i} \overline{p}_i + b_{J_i} = 0 , \; i = 1, 2, ..., Q ,$$

де A_{J_i} — матриці, що утворені зі строк A_i^j, $j \in J_i(\overline{p}_i)$, b_{J_i} — відповідні складові вільних членів рівнянь.

Надалі припускаємо, що виконано умову невиродженості — за довільного допустимого $\overline{p}_i$ вектори A_i^j, $j \in J_i(\overline{p}_i)$ є лінійно незалежними $(i = 1, 2, ..., Q)$.

Нехай при фіксованому $\overline{u} \geq 0$ задачі (10) розв’язані, знайдено оптимальні точки $p_i(\overline{u})$ та множини індексів активних обмежень $J_i(\overline{p}_i)$. Точку $\overline{u}$ називаємо регулярною, якщо складові векторів Лагранжа, що відповідають активним обмеженням, є строго додатними: $v_{J_i}(\overline{u}) > 0$, $i = 1, 2, ..., Q$. Позначимо

$$H_i(u) = \min_{p_i \in M_i} L_i(p_i, u) . \quad (11)$$

З урахуванням адитивної сепарабельної функції $L(p,u)$ двоїста задача (9) може бути представлена в еквівалентній формі:

$$\max_{u \geq 0} \left\{ H(u) \equiv \sum_{i=1}^{Q} H_i(u) + b_0^* u \right\} . \quad (12)$$

Задачу (12) назвемо двоїстою координуючою задачею, а задачі (10), що слугують для знаходження p_i при відомому значенні u, — локальними задачами.

Для конкретизації вигляду функції $H(u)$ використаємо ще одне означення.

Нехай для регулярної точки $\overline{u} \geq 0$ визначено набір активних обмежень i-ї задачі (10).

Підмножина множини регулярних точок $u \ge 0$, що належать до околу $\bar{u}$, якій відповідають заданий фіксований набір активних обмежень та незмінні знаки множників Лагранжа, $v_{J_i}(u) > 0$, називається регулярною областю для функції $H_i(u)$.

Теорема 1. У кожній регулярній області функції $H_i(u)$ є квадратичними.

Доведення. Функції $L_i(p_i, u)$ є строго опуклими по p_i та диференційовними по u. Мінімум L_i досягається в єдиній точці $p_i(u)$. Тоді функції $H_i(u)$ є неперервно диференційовними, а їх градієнти дорівнюють градієнтам відповідних цільових функцій задач (10) у оптимальних точках $p_i(u)$ [8]:

$$H_i'(u) = (L_i(p_i(u), u))_u' = B_i p_i(u) . \qquad (13)$$

Для регулярної точки u необхідні умови екстремуму i-ї точки можуть бути представлені у такій формі:

$$c_i + p_i + B_i^* u + A_{J_i}^* v_{J_i} = 0 ,$$

$$A_{J_i} p_i + b_{J_i} = 0, \; v_{J_i} > 0 .$$

Звідси

$$v_{J_i}(u) = -G_{J_i}(B_i^* u + c_i) + g_{J_i} , \qquad (14)$$

$$p_i(u) = -(E - P_{J_i})(B_i^* u + c_i) - G_{J_i} b_{J_i} , \qquad (15)$$

де $G_{J_i} = A_{J_i}^* (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1}$, $P_{J_i} = G_{J_i} A_{J_i}$, $g_{J_i} = (A_{J_i} A_{J_i}^*)^{-1} b_{J_i}$.

Використовуючи вираз для градієнта (13), означення функції H_i – формулу (11), та вираз (15), отримаємо, що для тих u, за яких матрицею активних обмежень задачі (10) є A_{J_i}, виконується

$$H_i(u) = -\frac{1}{2} \langle B_i (E - P_{J_i}) B_i^* u, u \rangle - \langle d_{J_i}, u \rangle - e_{J_i} , \qquad (16)$$

де $d_{J_i} = B_i (E - P_{J_i}) c_i + B_i G_{J_i} b_{J_i}$, а $e_{J_i} = \frac{1}{2} \| (E - P_{J_i}) c_i \|^2 + \langle G_{J_i} b_{J_i}, c_i \rangle - \frac{1}{2} \| G_{J_i} b_{J_i} \|^2$.

Таким чином доведено, що функція $H_i(u)$ всередині регулярної області є квадратичною, та визначено її вигляд. Оскільки кожна регулярна область для функції $H(u)$ утворюється перетином регулярних областей для функцій $H_i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, Q$, то в цілому функція $H(u)$ є вгнутою, гладкою, кусково-квадратичною, причому кожен квадратичний фрагмент відповідає певній регулярній області, що визначається співвідношеннями

$$A_{J_i} p_i + b_{J_i} = 0 , \; v_{J_i} > 0 , \; i = 1, 2, \ldots, Q ,$$

і може бути конкретизований за допомогою виразу $H(u) = \sum_{i=1}^{Q} H_i(u) + b_0^* u$ і формули (16).

Замість розв'язання задачі (12) будемо здійснювати послідовну максимізацію квадратичних функцій у регулярних областях, контролюючи вихід на границі цих областей. У процесі максимізації використовуємо метод спряжених градієнтів, модифікований з урахуванням простих обмежень $u \ge 0$ [9]. Ознакою виходу на границю регулярної області може слугувати обертання на рівність одного з неактивних обмежень або рівність нулю одного із множників Лагранжа, що відповідають активним обмеженням $v_{J_i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, Q$. Це є сигналом до припинення процесу обчислень за методом спряжених градієнтів і зміни набору активних обмежень.

З огляду на диференційовність функції $H(u)$ та гладкість поєднання різних квадратичних функцій у нерегулярних точках для виходу з нерегулярної точки можна застосувати крок у напрямку градієнта або обчислити напрямок за методом спряжених градієнтів. Ці градієнтні процедури слугують для знаходження точки, в якій значення цільової функції двоїстої координуючої задачі (12) строго більше, ніж у вихідній нерегулярній точці.

Декомпозиційний алгоритм розв'язання задачі зі зв'язуючими обмеженнями

Крок 1. Вибираємо довільну початкову точку $u_0 \ge 0$.

Крок 2. Розв'язуємо методом спряжених градієнтів задачі, двоїсті до локальних задач (10), при $u = u_0$:

$$\max_{v_i \ge 0} \left\{ -\frac{1}{2} \langle A_i A_i^* v_i, v_i \rangle - \langle A_i (B_i^* u_0 + c_i) - b_i, v_i \rangle \right\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, Q .$$

Знайдені двоїсті змінні $v_i(u_0)$ та оптимальні розв'язки $p_i(u_0) = -c_i - B_i^* u_0 - A_i^* v_i(u_0)$ використовуємо для контролю за виконанням умов регулярності. Для цього перевіряємо, чи є множники Лагранжа, що відповідають активним обмеженням, строго додатними. Можливі два випадки.

Крок 3. Якщо точка u_0 є регулярною, то формуємо і розв'язуємо двоїсту задачу

$$\max_{u \geq 0} \left\{ H(u) \equiv \right.$$

$$\left. \equiv -\sum_{i=1}^{Q} \left[\frac{1}{2} \langle B_i (E - P_{J_i}) B_i^* u, u \rangle + \langle d_{J_i}, u \rangle \right] + \langle b_0, u \rangle \right\}$$

методом спряжених градієнтів з покроковим аналізом виходу на границю відповідної регулярної області. Для цього знаходиться мінімальне значення кроку $\overline{\beta}_{k+1}$, за якого, рухаючись у напрямку s^k, знайденому за методом спряжених градієнтів, одне з неактивних обмежень стає активним або один із множників Лагранжа, що відповідають активним обмеженням, обертається на нуль. Це значення порівнюється з кроком методу спряжених градієнтів β_k. Якщо $\beta_k < \overline{\beta}_k$, то $u^{k+1} = u^k + \beta_k z^k$ і процес продовжується. Якщо ж $\beta_k \geq \overline{\beta}_k$, то $u^{k+1} = = u^k + \overline{\beta}_k z^k$ і процес закінчено. В останньому випадку вважаємо отриману точку початковою і працюємо з нею, як з точкою u_0, починаючи з кроку 2.

Крок 4. У точці u_0 умови регулярності не виконуються. Робимо крок методу спряжених градієнтів, причому оскільки функція $H(u)$ в точці u_0 не є квадратичною, то вибір множника β_k здійснюється з вимоги

$$H(u^k + \beta_k z^k) = \max_{\beta \geq 0} H(u^k + \beta z^k),$$

як це робиться в алгоритмі спряжених градієнтів для вгнутих функцій [6].

Критерієм закінчення процесу є виконання умов оптимальності на кроці 3 або 4 процесу:

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u^i} \leq 0 \text{ для } u^i = 0,$$

$$\frac{\partial H(u)}{\partial u^i} = 0 \text{ для } u^i > 0,$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Аналіз швидкості збіжності

Нехай u^k і u^j, $j > k$ — точки, що слугують вихідними для процедури спряжених градієнтів у різних регулярних областях. Наведений алгоритм будує таку послідовність $\{u^k\}$ допустимих точок двоїстої задачі (12), вздовж якої значення функції $H(u)$ монотонно зростає. Тому множини номерів активних обмежень у різних регулярних областях є різними, адже якби

$$J_i(p(u^k)) = J_i(p(u^j)),\ i = 1, 2, \dots, Q, \qquad (17)$$

то $H(u^k) = H(u^j)$. Але відповідно до побудови процесу $H(u^k) < H(u^j)$ при $j > k$ так, що рівностей (17) бути не може. З другого боку, всі множини $J_i(p(u^k))$ є підмножинами скінченної множини обмежень локальних задач, і тому число таких підмножин є скінченним. Максимізація квадратичної функції в регулярній області відбувається за скінченне число кроків. Отже, після скінченного числа кроків ми прийдемо в область, що містить точку максимуму функції $H(u)$, бо інакше процес перебору регулярних областей можна було би продовжити. Якщо ж всі точки побудованої послідовності $\{u^k\}$ є нерегулярними, то цей метод є просто реалізацією методу спряжених градієнтів для вгнутих функцій. Збіжність цього методу доведена в [6].

Таким чином, ця процедура за скінченне число кроків приводить в окіл точки максимуму функції $H(u)$. Швидкість збіжності методу залежить від поведінки функції $H(u)$ в околі точки максимуму. Якщо точка максимуму є регулярною, то, виходячи з неперервної залежності p та v від u, умови регулярності будуть виконуватися і в деякому її околі. Максимізація $H(u)$ в околі точки максимуму буде здійснюватися методом спряжених градієнтів для квадратичних функцій. Якщо ж точка максимуму є нерегулярною, то вона буде досягатися зі швидкістю аналогічного процесу для вгнутих функцій.

Теорема 2. Якщо точка максимуму $\bar{u}$ цільової функції двоїстої задачі (12) є регулярною, то метод збігається за скінченне число кроків. Якщо ж в точці $\bar{u}$ умови регулярності не виконуються, то процес збігається до точки $\bar{u}$ зі швидкістю методу спряжених градієнтів для вгнутих функцій.

Висновки

Запропонований підхід до розв'язання нелінійних оптимізаційних задач базується на поєднанні прийомів апроксимації та декомпозиції. Апроксимуючі методи дають змогу розв'язувати задачі зі складними нелінійностями, а декомпозиційні схеми відкривають шлях до аналізу дійсно великих блочно структурованих систем.

На відміну від існуючих методів, побудовані алгоритми не вимагають адитивної сепарабельністі функцій, що визначають критерій та обмеження. При відповідному виборі апроксимуючих методів складові цільової функції координуючої задачі формуються у явному вигляді і не потребують додаткових процедур регуляризації вихідної задачі.

Алгоритми, побудовані на основі запропонованого підходу, можуть застосовуватися для розв'язання широкого кола транспортно-виробничих задач, що описують просторово або функціонально розподілені системи за наявності в них незалежно функціонуючих підсистем та обмежень на якісь спільні ресурси. Як приклад апроксимуючого методу в роботі використовується метод лінеаризації, що є методом першого порядку. Звичайно, ефективність цього методу може бути підвищена із застосуванням деяких спеціальних прийомів [10], але для деяких класів задач доцільно використовувати апроксимуючі методи більш виского порядку, беручи як матрицю D_k матрицю других похідних $f_0''(x^k)$, або деякі наближення до цієї матриці, або функцію Лагранжа, як це робиться у методах послідовного квадратичного програмування. Очевидно, що в останніх методах оцінки швидкості збіжності є вищими, ніж у методах першого порядку, і опис класів задач, до яких вони можуть бути застосовані, та аналіз ефективності таких процедур може стати предметом для подальших досліджень.

Список літератури

1. *Лэсдон Л.С.* Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
2. *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. – М.: Наука, 1981. – 352 с.
3. *Purkayastha P., Baras J.* An optimal distributed routing algorithm using dual decomposition techniques // Commun. Inform. Systems. – 2008. – **8**, № 3. – P. 277–302.
4. *Goldfarb D., Ma S.* Fast multiple splitting algorithms for convex optimization // SIAM J. Optimization. – 2012. – **22**, № 2. – P. 533–556.
5. *Komodakis N., Paragios N., Tziritas G.* MRF energy minimization and beyond via dual decomposition // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. – 2011. – **33**, is. 3. – P. 531–552.
6. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
7. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 3. – С. 67–73.
8. *Пшеничный В.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
9. *Кірік О.Є., Остапенко В.В.* Оптимальний розподіл гідроресурсів у зрошувальних системах мережевої структури // Системні дослідження та інформ. технології. – 2010. – № 4. – С. 79–90.
10. *Александрова В.М., Кірік О.Є.* Оптимізаційні моделі й алгоритми для мережевих задач розподілу ресурсів // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 5. – 39–45.

References

1. L.S. Lasdon, *Optimization Theory for Large Systems.* Moscow, USSR: Nauka, 1975, 432 p. (in Russian).
2. V.I. Tsurkov, *Decomposition in Problems of Large Dimension.* Moscow, USSR: Nauka, 1981, 352 p. (in Russian).
3. P. Purkayastha and J. Baras, "An optimal distributed routing algorithm using dual decomposition techniques", *Commun. Inform. Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 277–302, 2008.
4. D. Goldfarb and S. Ma, "Fast multiple splitting algorithms for convex optimization", *SIAM J. Optimization,* vol. 22, no. 2, pp. 533–556, 2012.

5. N. Komodakis *et al.*, “MRF energy minimization & beyond via dual decomposition”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 33, is. 3, pp. 531–552, 2011.
6. B.N. Pshenichnyi and Y.M. Danilin, *Numerical Methods in Extremal Problems.* Moscow, USSR: Nauka, 1975, 319 p. (in Russian).
7. O.E. Kirik, “The linearization and the conjugate gradient algorithms for nonlinear network flow distribution problems”, *Naukovi Visti NTUU “KPI”,* no. 3, pp. 67–73, 2007 (in Ukrainian).
8. B.N. Pshenichnyi, *Convex Analysis and Extremal Problems.* Moscow, USSR: Nauka, 1980, 320 p. (in Russian).
9. O.E. Kirik and V.V. Ostapenko, “Optimal hydro resource distribution in the network structure irrigation systems”, *Systemni Doslidzhennya ta Inform. Tekhnolohiyi,* no. 4, pp. 79–90, 2010 (in Ukrainian).
10. V.M. Alexandrova and O.E. Kirik, “Optimization models and algorithms for network problems of resours’ distribution”, *Naukovi Visti NTUU “KPI”*, no. 5. pp. 39–45, 2014 (in Ukrainian).

О.Є. Кірік

ПІДХІД ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ БЛОЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗІ ЗВ’ЯЗУЮЧИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Проблематика. Розглядаються нелінійні задачі оптимізації функціонування великих просторово або функціонально розподілених систем за наявності в них незалежно функціонуючих підсистем та обмежень на деякі спільні ресурси.

Мета дослідження. Метою роботи є побудова ефективного підходу до розв’язання нелінійних оптимізаційних задач блочної структури зі зв’язуючими обмеженнями на основі застосування комбінації апроксимуючих методів нелінійної оптимізації та прийомів декомпозиції.

Методика реалізації. Пропонується триступенева ітераційна схема. На верхньому рівні відбувається заміна вихідної задачі послідовністю апроксимуючих задач з адитивно-сепарабельними цільовими функціями та лінійними обмеженнями. На другому рівні розв’язуються координуючі задачі, що формуються за рахунок інформації, отриманої на найнижчому рівні при розв’язанні локальних блочних задач.

Результати дослідження. Побудовано алгоритм, що є комбінацією методу лінеаризації Б.М. Пшеничного та двоїстої декомпозиційної схеми. Конкретизовано структуру двоїстої координуючої задачі. Проведено оцінювання швидкості збіжності.

Висновки. Запропонований підхід та побудовані на його основі алгоритми можуть застосовуватися для розв’язання широкого кола проблем, пов’язаних з оптимальним розподілом обмежених ресурсів у великих блочно-структурованих системах.

Ключові слова: задачі розподілу ресурсів; оптимізаційні моделі; методи нелінійного програмування; алгоритми декомпозиції.

Е.Е. Кирик

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ СО СВЯЗУЮЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Проблематика. Рассматриваются нелинейные задачи оптимизации функционирования больших пространственно или функционально распределенных систем при наличии в них независимо функционирующих подсистем и ограничений на некоторые общие ресурсы.

Цель исследования. Целью работы является построение эффективного подхода к решению нелинейных оптимизационных задач блочной структуры со связывающими ограничениями на основе применения комбинации аппроксимирующих методов нелинейной оптимизации и приемов декомпозиции.

Методика реализации. Предлагается трехступенчатая итерационная схема. На верхнем уровне происходит замена исходной задачи последовательностью аппроксимирующих задач с аддитивно-сепарабельными целевыми функциями и линейными ограничениями. На втором уровне решаются координирующие задачи, которые формируются за счет информации, полученной на низшем уровне при решении локальных блочных задач.

Результаты исследования. Построен алгоритм, который является комбинацией метода линеаризации Б.Н. Пшеничного и двойственной декомпозиционной схемы. Конкретизирована структура двойственной координирующей задачи. Проведена оценка скорости сходимости.

Выводы. Предложенный подход и построенный на его основе алгоритм могут применяться для решения широкого круга проблем, связанных с оптимальным распределением ограниченных ресурсов в больших блочно-структурированных системах.

Ключевые слова: задачи распределения ресурсов; оптимизационные модели; методы нелинейного программирования; алгоритмы декомпозиции.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
“Інститут прикладного системного
аналізу” НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
25 травня 2015 року