УДК 517.9
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.59942

М.Є. Дудкін, В.І. Козак
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

УМОВИ ЄДИНОСТІ МІРИ, ВІДПОВІДНОЇ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

Background. We continue to study the properties of block Jacobi matrices corresponding to the two-dimensional real problem. Repeating the reasoning applied to probabilistic measure with compact support, we get similar matrices associated with Borel measure without limitation. The difficulty in our research is that the probability measure on compact corresponds uniquely to the block Jacobi type matrices. If the measure is arbitrary, then the same set of matrices can fit infinite number of measures.

Objective. The objective of research is to find conditions under which some Borel measure without limitation corresponds to only one pair of block matrices.

Methods. Using previous publications established the form of block Jacobi matrix type, by coefficients of these matrices one can inferred about the above mentioned bijection.

Results. The result of research is a conditions on the coefficients in the form of divergent series in which the one-to-one correspondence holds true.

Conclusions. Using the solution of direct and inverse spectral problems for two-dimensional real moment problem of the previous work we found its condition to be determined (unique) by the coefficients of the block Jacobi type matrix. The result is a two-dimensional analogue of the well-known case in classical Hamburger moment problem.

Keywords: two-dimensional moment problem; block Jacobi type matrix; determinism of a two-dimensional moment problem.

Вступ

Проблема моментів Гамбургера з часу її постановки набула широкого кола узагальнень. Серед узагальнень відомі тригонометрична, комплексна, багатовимірна, матрична та нескінченновимірна проблеми моментів, а також зображення додатно визначених ядер тощо. Особливий інтерес до проблеми був викликаний не тільки широкими технічними застосуваннями, але й глибоким змістовним математичним апаратом.

Відзначимо найбільш помітні й вагомі результати з цього кола питань, які належать М.Г. Крейну, Н.І. Ахіезеру, Ю.М. Березанському [1–6] та їх численним учням і послідовникам.

Серед інструментів дослідження проблеми є відповідні матриці Якобі. На сьогодні відомі матриці типу Якобі, пов’язані не тільки з одновимірною дійсною і сильною проблемами моментів, але й із тригонометричною (CMV-матриці), комплексною та двовимірною проблемами моментів [7, 8]. У термінах коефіцієнтів одновимірної дійсної, сильної та матричної проблем моментів можна говорити про детермінованість відповідної проблеми. Враховуючи новизну [9–11] матриць типу Якобі для двовимірної проблеми моментів, можна сказати, що для них подібних досліджень раніше не було.

Постановка задачі

У випадку класичної проблеми моментів Гамбургера за коефіцієнтами матриці Якобі можна з’ясувати, чи має моментна послідовність єдину відповідну міру на дійсній вісі. Отже, завдання цієї короткої роботи — дати відповідь на таке запитання: чи можна у двовимірному випадку за коефіцієнтами — але вже двох блочних типу Якобі матриць — встановити факт детермінованості дійсної двовимірної проблеми моментів, тобто відповідність єдиній мірі на дійсній площині?

З огляду на попередні роботи можна сказати, що взагалі продовжуються дослідження об’єктів, отриманих у [9–11].

Попередні відомості

Дійсна двовимірна проблема моментів полягає в пошуку умов для заданої двохіндексної послідовності $\{S_{m,n}\}$, $m, n \in N_0$, дійсних чисел так, щоб існувала міра $d\rho(x, y)$ на дійсній площині R^2 і виконувалися рівності

$$S_{m,n} = \int_{R^2} x^m y^n d\rho(x, y), \; m, n \in N_0. \qquad (1)$$

Тепер залишимо проблему моментів і одразу почнемо з міри. Нехай $d\rho(x, y)$ (взагалі без обмежень) – міра Бореля на дійсній площині R^2 та $L_2 := L_2(R^2, d\rho(x,y))$ – простір функцій, інтегрованих на R^2 із квадратом за мірою $d\rho(x,y)$. Накладемо на міру $d\rho(x,y)$ умову. А саме, припустимо, що функції $\Omega := \{x^m y^n\}$, $m, n \in N_0 := \{0,1,2,...\}$, є лінійно незалежними і утворюють в L_2 тотальну множину.

Розглянемо оператори множення на незалежні змінні $Af(x,y) = xf(x,y)$ і $Bf(x,y) = yf(x,y)$ у просторі L_2. Оскільки міра $d\rho(x,y)$ не має обмежень, то, взагалі, A і B є необмеженими операторами. Випадок обмежених операторів A і B детально розглянутий у [9, 10]. В цій роботі принципово вважається, що оператори A і B тільки необмежені.

Аналогічно як і в [9, 10], ортогоналізуємо за Шмідтом множину функцій Ω відносно скалярного добутку простору L_2 згідно з порядком [12]

$$\begin{gathered} x^0y^0;\, x^1y^0, x^0y^1;\, x^2y^0, x^1y^1, x^0y^2;\, ,...; \\ x^ny^0, x^{n-1}y^1, ..., x^0y^n, ...;\, ... \end{gathered} \tag{2}$$

Як результат, отримуємо ортонормовану систему поліномів:

$$\begin{array}{llll} P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), \;\dots; & P_{n;0}(x,y),\dots \\ & P_{1;1}(x,y); & P_{2;1}(x,y), & P_{n;1}(x,y), \\ & & P_{2;2}(x,y); & P_{n;2}(x,y), \\ & & & \dots \\ & & & P_{n;n}(x,y); \end{array} \tag{3}$$

Для визначеності покладається $P_{0;0}(x,y) := 1$.

Також, аналогічно як у [9, 10], симетричний щільно визначений (але, можливо, не самоспряжений) оператор A множення на незалежну змінну x в ортонормованому базисі (3) має вигляд тридіагональної типу Якобі блочної матриці:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4}$$

що діє у просторі (еквівалентному $l_2 \times l_2$)

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus ...,\; H_n = C^{n+1},\; n \in N_0, \\ \mathbf{l}_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty},\; \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{H_n}^2 < \infty \end{gathered} \tag{5}$$

за правилом

$$(J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1},$$

$$n \in \mathrm{N}_0,\; f_{-1} := 0,\; \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2,$$

де блоки-матриці діють між просторами:

$$\begin{aligned} a_n &: H_n \to H_{n+1}, \\ b_n &: H_n \to H_n, \quad n \in N_0. \\ c_n &: H_{n+1} \to H_n, \end{aligned}$$

У (4) $n \in N_0$ b_n – $((n+1) \times (n+1))$-матриця: $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$ ($b_0 = b_{0;0,0}$ – скаляр); a_n – $((n+2) \times (n+1))$-матриця: $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; c_n – $((n+1) \times (n+2))$-матриця: $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$.

Елементи матриць

$$a_{n;\beta+2,\beta} = a_{n;\beta+3,\beta} = ... = a_{n;n+1,\beta},$$

$$c_{n;\alpha,\alpha+2} = c_{n;\alpha,\alpha+3} = ... = c_{n;\alpha,n+1}$$

рівні нулю, $\beta = 0,1,...,n-1, \alpha = 0,1,...,n-1, \forall n \in N$. Елементи $a_{n;\alpha+1,\alpha}; c_{n;\alpha,\alpha+1}$ є строго додатними для $\alpha = 0,1,...,n$, $n \in N_0$. Матриця J_A є симетричною, тобто $a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}$, $\beta = 0,1,2,...,n$, $\alpha = 0,1,...,\beta, \beta+1$, $n \in N_0$.

Знову, аналогічно як у [9, 10], симетричний щільно визначений (але, можливо, не самоспряжений) оператор B множення на незалежну змінну y в ортонормованому базисі (3) має вигляд тридіагональної типу Якобі блочної матриці:

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{6}$$

що також діє у просторі (5) за правилом

$$(J_B f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1},$$

$$n \in N_0,\; f_{-1} := 0,\; \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2,$$

де блоки-матриці діють між просторами:

$$\begin{aligned} u_n &: H_n \to H_{n+1}, \\ w_n &: H_n \to H_n, \quad n \in N_0. \\ v_n &: H_{n+1} \to H_n, \end{aligned}$$

У (6) $n \in N_0$ w_n – $((n+1) \times (n+1))$-матриця: $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$ ($w_0 = w_{0;0,0}$ – скаляр); u_n – $((n+2) \times$

$\times (n+1))$-матриця: $u_n = (u_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; v_n – $((n+1) \times$ $\times (n+2))$-матриця: $v_n = (v_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$.

Елементи матриць

$$u_{n;\beta+1,\beta} = u_{n;\beta+2,\beta} = \ldots = u_{n;n+1,\beta},$$

$$v_{n;\alpha,\alpha+1} = v_{n;\alpha,\alpha+2} = \ldots = v_{n;\alpha,n+1}$$

рівні нулю, $\beta = 0,1,\ldots,n, \alpha = 0,1,\ldots,n, \forall n \in N$. Елементи $u_{n;\alpha,\alpha}; v_{n;\alpha,\alpha+1}, \alpha = 0,1,\ldots,n, n \in N_0$, є строго додатними. Матриця J_B є симетричною, тобто $u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}, \alpha = 0,1,\ldots,n, \beta = \alpha,\ldots,n, n \in N$.

Також зазначимо, що матриці J_A і J_B комутують на фінітних векторах.

Однозначність відповідності матриць мірі

Проведемо аналіз коефіцієнтів матриць J_A і J_B. Умовою того, що матриці J_A і J_B є обмеженими операторами в [9, 10], було те, що міра $d\rho(x,y)$ ймовірнісна з носієм на компакті, а отже, однозначно відповідає матрицям. Відмовляючись від обмежень на міру, можна дійти до ситуації, коли матрицям J_A і J_B можуть відповідати багато мір. Це можливо тоді, коли відповідні оператори A і B мають індекси дефекту (1, 1) кожний і до того ж мають безліч комутуючих самоспряжених розширень. Нашою задачею є встановлення умов на матриці J_A і J_B, за яких не тільки відповідні оператори A і B є істотно самоспряженими і комутують на деякій щільній множині, але і їх замикання комутують у строгому резольвентному сенсі.

Як відомо з [13], комутуючі на щільній множині оператори A і B комутують у строгому резольвентному сенсі, якщо $S = A^2 + B^2$ є істотно самоспряженим оператором. Умови комутативності матриць J_A і J_B, частково досліджені в [9, 10].

Запишемо вигляд матриці $J_S = J_A^2 + J_B^2$, відповідної оператору $S = A^2 + B^2$. J_S також діє в l_2, але зобразимо його по-іншому:

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{H}_n \oplus \ldots,$$

де $\mathbf{H}_0 = H_0$, $\mathbf{H}_1 = H_1 \oplus H_2$, $\mathbf{H}_2 = H_3 \oplus H_4$ і т.д., $\mathbf{H}_n = H_{2k-1} \oplus H_{2k}, k, n \in N$.

У просторі (5) оператор S має п'ятидіагональну структуру в термінах блоків (4), (6). Для можливості застосування спектральної теорії Якобієвих матриць внесемо розбиття в J_S на блоки так, щоб отримати блочну тридіагональну структуру:

$$J_S = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

що вже діє у просторі (7) за правилом

$$(J_S f)_n = p_{n-1} f_{n-1} + r_n f_n + q_n f_{n+1},$$

$$n \in N_0, f_{-1} := 0, \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2,$$

де блоки-матриці діють вже між новими просторами:

$$p_n : H_n \to \mathbf{H}_{n+1},$$

$$r_n : H_n \to \mathbf{H}_n,$$

$$q_n : H_{n+1} \to \mathbf{H}_n, n \in N_0.$$

У (8) r_0 — скаляр ($r_0 = b_0 b_0 + c_0 a_0 + w_0 w_0 + v_0 u_0$); r_n — (2×2)-матриця, $n \in N$, елементи якої є лінійними комбінаціями матриць (4) і (6):

$$r_n = \left[\begin{array}{lll} a_{n-1}c_{n-1} & +b_n b_n & \\ & +c_n a_n & +u_n v_n \\ & +w_n w_n & +v_n u_n \\ a_n b_n & +b_{n+1} a_n & \\ & +u_n w & +w_{n+1} u_n \end{array} \right. \to$$

$$\to \left. \begin{array}{lll} b_n c_n & +c_n b_{n+1} & \\ & +w_n v_n & +v_n w_{n+1} \\ a_n c_n & +b_{n+1} b_{n+1} & \\ & +c_{n+1} a_{n+1} & +u_n v_n \\ & +w_{n+1} w_{n+1} & v_{n+1} u_{n+1} \end{array} \right],$$

q_0 – (1×2)-матриця, елементи якої є лінійними комбінаціями матриць (4) і (6):

$$q_0 = [b_0 c_0 + c_0 b_1 + w_0 v_0 + v_0 w_1 \quad c_0 c_1 + v_0 v_1];$$

q_n – (2×2)-матриця, $n \in N$, елементи якої є лінійними комбінаціями матриць (4) і (6):

$$q_n = \left[\begin{array}{c} c_n c_{n+1} + v_n v_{n+1} \\ b_{n+1} c_{n+1} + c_{n+1} b_{n+2} + w_{n+1} v_{n+1} + v_{n+1} w_{n+2} \end{array} \right. \to$$

$$\to \left. \begin{array}{c} 0 \\ c_{n+1} c_{n+2} + v_{n+1} v_{n+2} \end{array} \right];$$

p_0 – (2×1)-матриця, елементи якої є лінійними комбінаціями матриць (4) і (6):

$$p_0 = \begin{bmatrix} a_0 b_0 + b_1 a_0 + u_0 w_0 + w_1 u_0 \\ a_1 a_0 + u_1 u_0 \end{bmatrix};$$

p_n – (2×2)-матриця $n \in N$, елементи якої є лінійними комбінаціями матриць (4) і (6):

$$p_n = \begin{bmatrix} a_{n+1}a_n + u_{n+1}u_n & \to \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{matrix} a_{n+1}b_{n+1} + b_{n+2}a_{n+1} + u_{n+1}w_{n+1} + w_{n+2}u_{n+1} \\ a_{n+2}a_{n+1} + u_{n+2}u_{n+1} \end{matrix} \Bigg].$$

Поліноми $P_n(x,y) = \{P_{n;0}(x,y), P_{n;1}(x,y), P_{n;2}(x,y), \ldots, P_{n;n}(x,y)\}^{\perp}$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} J_A\, P_n(x,y) = xP_n(x,y), \\ J_B\, P_n(x,y) = yP_n(x,y). \end{cases}$$

Тоді вони є також розв'язками рівняння

$$J_S\, P_n(x,y) = (x^2+y^2)P_n(x,y).$$

Перепишемо останнє рівняння, враховуючи нове зображення J_S з (8):

$$J_S\, \mathbf{P}_n(x,y) = (x^2+y^2)\mathbf{P}_n(x,y),$$

де $\mathbf{P}_0(x,y) = \{P_0(x,y)\}^{\perp}, \mathbf{P}_1(x,y) = \{P_1(x,y), P_2(x,y)\}^{\perp}, \ldots, \mathbf{P}_n(x,y) = \{P_{2k-1}(x,y), P_{2k}(x,y)\}^{\perp}, n,k \in N.$

Тепер для оператора J_S використаємо стандартний відомий результат про те, що J_S є істотно самоспряженим оператором, якщо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|q_n\|} = \infty \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|p_n\|} = \infty \right). \quad (9)$$

Вираз у дужках є альтернативним в силу симетричності матриць J_A, J_B, а отже, і J_S. Останню рівність можна було б залишити як відповідь, але, використовуючи вигляд $\|q_n\|$ ($\|p_n\|$):

$$\|q_n\| = \max\{\|c_n c_{n+1} + v_n v_{n+1}\|, \|c_{n+1}c_{n+2} + v_{n+1}v_{n+2}\|\} \le \max\{\|c_n\|\cdot\|c_{n+1}\| + \|v_n\|\cdot\|v_{n+1}\|, \|c_{n+1}\|\cdot\|c_{n+2}\| + \|v_{n+1}\|\cdot\|v_{n+2}\|\}$$

$$(\|p_n\| = \max\{\|a_{n+1}a_n + u_{n+1}u_n\|, \|a_{n+2}a_{n+1} + u_{n+2}u_{n+1}\|\} \le \max\{\|a_{n+1}\|\cdot\|a_n\| + \|u_{n+1}\|\cdot\|u_n\|, \|a_{n+2}\|\cdot\|a_{n+1}\| + \|u_{n+2}\|\cdot\|u_{n+1}\|\}),$$

який не сильно послаблює результат, отримуємо таку умову:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|c_n\|^2 + \|v_n\|^2} = \infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|a_n\|^2 + \|u_n\|^2} = \infty \right).$$

Нарешті, враховуючи вигляд матриць c_n, v_n, отримуємо такий результат.

Теорема. Блочні тридіагональні матриці типу Якобі (4), (6), відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, однозначно зіставляються з деякою борелівською мірою на дійсній площині, якщо коефіцієнти матриць задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\max\{c_{n;k,k+1}\}_{k=0}^{n})^2 + (\max\{v_{n;k,k}\}_{k=0}^{n})^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} c_{n;k,0}\right)^2} = \infty$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\max\{a_{n;k+1,k}\}_{k=0}^{n})^2 + (\max\{u_{n;k,k}\}_{k=0}^{n})^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n;0,k}\right)^2} = \infty \right).$$

Доведення міститься у попередніх міркуваннях з урахуванням внутрішньої структури матриць c_n, v_n, (a_n, u_n), $n \in N$. Окремі елементи c_0, v_0, (a_0, u_0) на збіжність (розбіжність) рядів не впливають.

Приклади.

1. Покладемо матриці J_A і J_B такими, що

$$a_{n;\alpha+1,\alpha} = c_{n;\alpha,\alpha+1} = \sqrt{\alpha+1},$$

$$u_{n;\alpha,\alpha} = v_{n;\alpha,\alpha} = \sqrt{n-\alpha},$$

$\alpha = 0,1,\ldots,n$, $n \in N_0$.

Усі інші елементи в a_n, c_n, u_n, v_n вважатимемо рівними нулю, а матриці b_n, w_n повністю нульовими. Зокрема, не важко переконатися в комутативності $J_A J_B$: $J_A J_B = J_B J_A$.

Тоді за теоремою

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Отже, так визначені матриці J_A і J_B однозначно відповідають мірі, яка їх породжує.

2. Покладемо матриці J_A і J_B такими, що

$$a_{n;\alpha+1,\alpha} = c_{n;\alpha,\alpha+1} = 1,$$

$$u_{n;\alpha,\alpha} = v_{n;\alpha,\alpha} = 1,$$

$\alpha = 0,1,\ldots,n$, $n \in N_0$.

Всі інші елементи в a_n, c_n, u_n, v_n вважатимемо рівними нулю, а матриці b_n, w_n повністю нульовими. Майже очевидна комутативність: $J_A J_B = J_B J_A$.

Тоді за теоремою

$$\frac{1}{2}(1+1+...+1+...)=\infty.$$

Отже, так визначені матриці J_A і J_B також однозначно відповідають мірі, яка їх породжує. Це ясно і без теореми, оскільки оператори відповідні матрицям a_n, c_n, u_n, v_n, є рівномірно обмеженими: $\|a_n\|=\|c_n\|=\|u_n\|=\|v_n\|=1$.

Зіставляючи такі матриці із класичними результатами (див. приклад [4]), доходимо висновку, що відповідна їм міра зосереджена в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ і з точністю до константи має вигляд

$$\frac{dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}.$$

Висновки

З використанням розв'язку прямої і оберненої спектральних задач для двовимірної дійсної проблеми моментів із попередніх праць [9–11] встановлено умову її детермінованості (однозначності) за коефіцієнтами матриць J_A і J_B. Результат є двовимірним аналогом, відомим у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера. Без зазначених умов попередні дослідження мали б лише формальний характер при розширенні на довільний клас мір.

Відзначимо, що проведені в цій роботі дослідження планувалися в [10, 11]. У подальших дослідженнях планується розглянути широке коло питань, пов'язаних зі спектральними властивостями матриць J_A і J_B.

Список літератури

1. *Krein M.G.* On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products // Докл. АН СССР. – 1946. – **53**. – № 1. – P. 3–6.
2. *Krein M.G.* On Hermitian operators with directing functionals // Сборник трудов Ин-та мат. АН СРСР. – 1948. – № 10. – P. 83–106.
3. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. – М.: Гос. физ.-мат. лит, 1961. – 312 с.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 450 с. – [Eng. transl.: Providence, R.I.: Amer. Math., Soc., 1968. – 450 p.].
5. *Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – К.: Наук. думка, 1988. – 800 с.
6. *Berezansky Yu.M., Dudkin M.E.* The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – **11**, № 4. – P. 327–345.
7. *Berezansky Yu.M., Dudkin M.E.* The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – **12**, № 1. – P. 1–32.
8. *Козак В.І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 10–15.
9. *Dudkin M.E., Kozak V.I.* Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, № 3. – P. 219–251.
10. *Дудкін М.Є., Козак В.І.* Поліноми другого роду у двовимірній проблемі моментів // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2015. – № 4. – P. 41–46.
11. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.
12. *E. Nelson.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **70**. – P. 572–614.

References

1. M.G. Krein, "On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products", *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, vol. 53, no. 1, pp. 3–6, 1946.
2. M.G. Krein, "On Hermitian operators with directing functionals", *Zbirnyk prac' Inst. Mat. AN USSR*, no. 10, pp. 83–106, 1948.
3. N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*. Moscow, USSR: Gos. fiz.-mat. lit, 1961 (in Russian).
4. Yu.M. Berezansky, *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*. Kyiv, USSR: 1965 (in Russian) (Eng. transl.: Providence, R.I.: Amer. Math., Soc., 1968).
5. Yu.M. Berezansky and Yu.G. Kondratiev, *Spectral Methods in Infnite-Dimensional Analysis*. Kyiv, USSR: Naukova Dumka, 1988 (in Russian).
6. Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin, "The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 11, no. 4, pp. 327–345, 2005.
7. Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin, "The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 12, no. 1, pp. 1–32, 2005.

8. V.I. Kozak, "Inverse spectral problem for a block matrix of Jacobi type corresponds to the real two dimensional moment problem", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 10–15, 2013 (in Ukrainian).
9. M.E. Dudkin and V.I. Kozak, "Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 20, no. 3, pp. 219–251, 2014.
10. M.E. Dudkin and V.I. Kozak, "Second order polynomials in the two dimensional moment problem", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 41–46, 2015 (in Ukrainian).
11. P.K. Suetin, *Orthogonal Polynomials on Two Variables*. Moscow, USSR: Nauka, 1988 (in Russian).
12. E. Nelson, "Analytic vectors", *Ann. Math*., vol. 70, pp. 572–614, 1959.

М.Є. Дудкін, В.І. Козак

УМОВИ ЄДИНОСТІ МІРИ, ВІДПОВІДНОЇ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

Проблематика. Продовжується вивчення властивостей блочних матриць Якобі, відповідних двовимірній дійсній проблемі моментів. Повторюючи міркування, застосовані до ймовірнісної міри з компактним носієм, отримуємо аналогічні матриці, пов'язані з борелівською мірою без обмежень. Складність досліджень полягає в тому, що ймовірнісна міра на компакті однозначно відповідає блочним матрицям типу Якобі. Якщо міра довільна, то одному й тому ж набору матриць може відповідати нескінченна кількість мір.

Мета дослідження. Метою роботи є знаходження умов, за яких навіть необмеженій мірі відповідає лише одна пара блочних матриць.

Методика реалізації. З використанням встановленого у попередніх роботах вигляду блочних матриць типу Якобі за коефіцієнтами цих матриць можна зробити висновок про зазначену вище взаємно однозначну відповідність.

Результати досліджень. Результатом дослідження є умови на коефіцієнти у вигляді розбіжного ряду, за яких виконується відповідність.

Висновки. З використанням розв'язку прямої та оберненої спектральних задач для двовимірної дійсної проблеми моментів із попередніх робіт встановлено умову її детермінованості (однозначності) за коефіцієнтами блочних матриць типу Якобі. Результат є двовимірним аналогом відомих у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів; блочні матриці типу Якобі; детермінованість двовимірної проблеми моментів.

Н.Е. Дудкин, В.И. Козак

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ МЕРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Проблематика. Продолжается изучение свойств блочных матриц Якоби, соответствующих двумерной действительной проблеме моментов. Повторяя рассуждения, примененные к вероятностной мере с компактным носителем, получаем аналогичные матрицы, связанные с борелевской мерой без ограничений. Трудность исследования заключается в том, что вероятностная мера на компакте однозначно соответствует блочным матрицам типа Якоби. Если мера произвольная, то одному и тому же набору матриц может соответствовать бесконечное количество мер.

Цель исследования. Целью работы является нахождение условий, при которых даже мере без ограничений соответствует только одна пара блочных матриц.

Методика реализации. С использованием установленного в предыдущих публикациях вида блочных матриц типа Якоби по коэффициентам этих матриц можно сделать вывод об указанном выше взаимно однозначном соответствии.

Результат исследований. Результатом исследований являются условия на коэффициенты в виде расходящегося ряда, при которых выполняется соответствие.

Выводы. С использованием решения прямой и обратной спектральных задач для двумерной действительной проблемы моментов из предыдущих работ установлено условие ее детерминированности (однозначности) по коэффициентам блочных матриц типа Якоби. Результат является двумерным аналогом известных в случае классической проблемы моментов Гамбургера.

Ключевые слова: двумерная проблема моментов; блочные матрицы типа Якоби; детерминированность двумерной проблемы моментов.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
07 грудня 2015 року