ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.246.8

П.І. Бідюк, С.В. Трухан

ОЦІНЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА БАЙЄСІВСЬКИМ ПІДХОДОМ В АКТУАРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

The article deals with Bayesian methodology for estimating unknown parameters of mathematical models and the method of analysis statistic data in insurance based on generalized linear models. These models are extension of linear regression when distribution of random variable can differ from normal. For estimating the parameters of proposed models classical and Bayesian approach were used. The main advantage of Bayesian approach is its ability to generate not only accurate estimates but probability distributions too. It gives the opportunity to describe in details the structure and the nature of investigated models. The value of damages in autoinsurance were hired for creating the forecasting model of actuarial process. The model with Poisson distribution and an exponential link function turned out to be acceptable for further use because it has minimum value of observation error and reliable estimate for risk value which was received using Bayesian approach. A normal model with identity link function allows to generate a result after one iteration with small value of observation error but “weak” predicted value of losses and poor risk assessment.

Keywords: Bayesian parameter estimation, generalized linear model, actuarial modeling, forecasting loss in insurance.

Вступ

Коректний вибір методу оцінювання параметрів математичних моделей за експериментальними (статистичними) даними — один із ключових моментів побудови адекватної моделі досліджуваного процесу. Одним із найбільш широко застосовуваних методів оцінювання параметрів є звичайний метод найменших квадратів (МНК) та його модифікації, зокрема рекурсивна версія, яка не потребує виконання операції обернення матриці [1]. Однак коректне застосування МНК ґрунтується на нормальному розподілі даних, відсутності автокореляції випадкових збурень, а також відсутності їх кореляції з основною змінною. Внаслідок досить жорстких обмежень у багатьох практичних випадках звичайний МНК використовують недостатньо коректно, що призводить до зміщення оцінок параметрів і погіршення їх характеристик.

На сьогодні існує актуальна задача оцінювання невідомих параметрів економіко-математичних моделей із застосуванням байєсівської парадигми до процесів із різним ступенем невизначеності. Саме байєсівський підхід дає можливість точніше оцінювати моделі в умовах, коли статистичні дані мають різні типи розподілів імовірностей, а також вибрати кращу модель із множини оцінених кандидатів. Перевагою цього підходу є також можливість його застосування до обробки статистичних вибірок відносно малих розмірів, а також за наявності пропусків даних [2, 3]. Популярним і відносно універсальним методом на сьогодні є метод Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ), який використовують для оцінювання параметрів лінійних і нелінійних моделей [4–6].

Постановка задачі

Мета роботи — проаналізувати можливості та характеристики байєсівського підходу до аналізу даних з метою його подальшого використання для оцінювання параметрів узагальнених лінійних моделей (УЛМ); виконати порівняльну характеристику оцінок параметрів, отриманих за допомогою байєсівського підходу та методу максимальної правдоподібності.

Використання байєсівського підходу у задачах страхування

До байєсівських відносять групу методів імовірнісно-статистичного оцінювання даних, які розроблено в результаті формулювання та пошуку оптимальних розв’язків задач аналізу поведінки процесів і систем різної природи. Більшість статистичних задач, незалежно від методів їх розв’язування, мають деякі загальні властивості, а саме: до отримання конкретної вибірки даних стосовно поведінки досліджуваного процесу потенційно можливими вважаються кілька ймовірнісно-статистичних моделей. Після отримання даних виникають виражені у числовому вигляді знання щодо відносної прийнятності цих моделей для розв’язання конкретної задачі. Одним зі способів аналізу відносної прийнятності ймовірнісних моделей є байєсівський підхід, основою якого є теорема

Байєса (ТБ). Передумовою для використання ТБ є деякі співвідношення між імовірностями подій різного характеру та специфікації кожної з них на необхідному рівні [7].

Як правило, для більшості прикладних задач характерна наявність невизначеностей різних типів. Прикладами можуть бути структурні, параметричні і статистичні невизначеності, які трапляються при створенні та використанні процедур ідентифікації процесів різної природи. Структурні невизначеності пов'язані насамперед із невизначеностями структури досліджуваного об'єкта і його математичної моделі, а параметричні — з невизначеностями оцінок її параметрів. Статистичні невизначеності часто стосуються задач встановлення типу розподілу випадкової величини і характеристик цього розподілу. Здебільшого теоретичні дослідження таких задач присвячені аналізу причин виникнення, класифікації та кількісного оцінювання невизначеностей, а також величин та ймовірностей супутніх ризиків.

Досить часто наявних статистичних даних недостатньо для розв'язання задач аналізу ризику та прийняття рішень. До таких задач неможливо застосувати традиційні частотні підходи, оскільки наявна інформація може містити лише суб'єктивні дані у вигляді експертних оцінок і тверджень. Більше того, ситуація, в якій приймається рішення, може бути зовсім новою та не містити результатів попереднього аналізу. Такі особливості істотно ускладнюють процес прийняття рішень і можуть погіршувати будь-які висновки. Саме тому байєсівський підхід набуває широкого застосування і стає корисним та ефективним інструментом моделювання, зокрема у задачах страхування.

Байєсівський підхід відрізняється від інших імовірнісно-статистичних підходів тим, що дослідник ще до отримання даних розглядає ступінь своєї довіри до можливих моделей та представляє її у вигляді ймовірності. Щойно дані отримано, ТБ дає можливість розрахувати ще одну множину ймовірностей, які являють собою уточнені ступені довіри до можливих моделей-кандидатів з урахуванням нової інформації, що надійшла з даними. На рис. 1 зображено процес аналізу даних, експертних оцінок та прийняття рішень, який лежить в основі байєсівського підходу.

Ключовою перевагою байєсівського підходу є використання будь-якої наявної апріорної інформації щодо стану об'єкта і параметрів його моделі. Така інформація виражається у вигляді апріорної ймовірності або щільності розподілу. Надалі початкові ймовірності уточнюють, використовуючи вибіркові дані, що відображаються у вигляді апостеріорного розподілу оцінок параметрів чи змінних моделі.

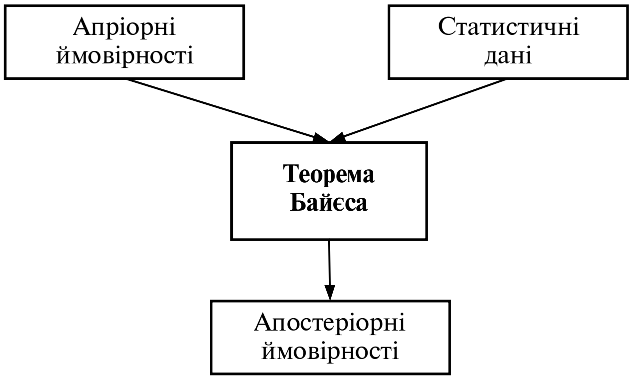

Рис. 1. Основна байєсівська парадигма

Розглянемо випадкову змінну X, яка має розподіл імовірностей, визначений у термінах невідомого параметра θ, що належить визначеній множині можливих значень Θ. Для заданого значення $X = x$ функція правдоподібності кожного окремого значення θ, визначається як $P(x/\theta)$. Апріорні характеристики визначаються у вигляді апріорної щільності ймовірності:

$$P(\theta), \theta \in \Theta \text{ такої, що } \int_{\Theta} P(\theta)\, d\,\theta = 1. \qquad (1)$$

Апріорний розподіл уточнюється після отримання вибіркових даних $X = x$ з метою отримання апостеріорної щільності ймовірності $P(x\,|\,\theta), \theta \in \Theta.$ Відповідно, за ТБ, яку називають ще принципом зворотної ймовірності, встановлюється взаємозв'язок між $P(x|\theta), P(\theta|x)$ та $P(\theta)$:

$$P(\theta|x) = \frac{P(x|\theta)P(\theta)}{P(x)}, \ \theta \in \Theta, \qquad (2)$$

де

$$P(x) = \int_{\Theta} P(x\,|\,\theta)\, P(\theta)\, d(\theta). \qquad (3)$$

З урахуванням того що знаменник у формулі (2) не залежить від θ, цим знаменником можна знехтувати і (2) можна подати у спрощеному вигляді:

$$P(\theta|x) \propto P(x|\theta)P(\theta), \qquad (4)$$

де $\propto$ позначає пропорційність. Узагальнюючи рівність (2) на множину n можливих змінних $(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, отримуємо вираз

$$P(\theta_j) = \frac{P(x|\theta_j)P(\theta_j)}{P(x)} = \frac{P(x|\theta_j)P(\theta_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i)P(x|\theta_i)},$$

де $P(\theta)$ – апріорний розподіл імовірностей допустимих значень вектора параметрів; $P(\theta|x)$ – апостеріорний розподіл значень θ за умови наявності даних x. При цьому θ_j називаються гіпотезами, а x – свідченнями, для яких виконуються гіпотези.

Аналіз апріорного розподілу

Визначення характеру апріорного розподілу залежить від умови поставленої задачі. Розглянемо такі можливі випадки: 1) розподіл апріорної інформації відомий; 2) розподіл параметра є "неінформативним". Коли апріорний та апостеріорний розподіли належать до одного класу розподілів, такі розподіли називають спряженими. Якщо відомий вигляд функції апріорного розподілу, то за допомогою байєсівського підходу можна знайти тип апостеріорного розподілу, використовуючи вираз (2). Використання спряжених апріорних розподілів для розрахункових методів у байєсівському підході пов'язане з існуванням замкненої форми розв'язку для умовних апостеріорних розподілів [5–7].

Розглянемо докладніше задачу визначення апостеріорного розподілу. Нехай існує вектор θ невідомих параметрів та X – апостеріорні статистичні дані. Байєсівский аналіз дає можливість знайти ключові оцінки характеристик початкових даних. Нехай статистичні дані належать до деякого розподілу, який позначається $P(\theta)$. Функцію правдоподібності для цієї моделі позначимо $f(X|\theta)$. Тепер означення умовної ймовірності має такий вигляд:

$$f(\theta|X) = \frac{f(\theta,X)}{f(X)} = \frac{f(X|\theta)P(\theta)}{f(X)}, \tag{5}$$

де маргінальний розподіл $f(X)$ можна отримати за виразом

$$f(X) = \int f(X,\theta)d\theta = \int f(X|\theta)P(\theta)d\theta.$$

Розподіл $f(\theta|X)$ із виразу (5) – це апостеріорний розподіл для θ. Враховуючи те, що знаменник формули (5) не залежить від $f(X)$, доцільно скористатись таким перетворенням:

$$f(\theta|X) \propto f(X|\theta)P(\theta), \tag{6}$$

де $P(\theta)$ – апріорний розподіл; $f(X|\theta)$ – функція правдоподібності. Вираз (6) – це представлення статистичного висновку, що ґрунтується на функції правдоподібності $f(X|\theta)$ байєсівського підходу зі сталим апріорним розподілом.

Після визначення деяких ключових понять, покладених в основу байєсівського аналізу, розглянемо приклад застосування спряжених розподілів та доведемо експериментально існування замкненої форми розв'язку. Нехай $X_1,\ldots,X_n$ – випадкова вибірка із нормального розподілу з невідомим середнім значенням μ і відомою дисперсією σ^2. Припустимо, що апріорний розподіл μ також нормальний із середнім μ_0 і дисперсією σ_0^2. Тоді апостеріорний розподіл μ при заданій вибірці $X_1,\ldots,X_n$ та відомому апріорному розподілі також буде нормально розподіленим із середнім μ_* і дисперсією σ_*^2, які визначаються таким чином [5]:

$$\mu_* = \frac{\sigma^2\mu_0 + n{\sigma_0}^2\bar{X}}{\sigma^2 + n{\sigma_0}^2},\quad \sigma_*^2 = \frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2 + n\sigma_0^2}, \tag{7}$$

де $\bar{X} = \sum_{i-1}^{n} X_i/n$ – вибіркове середнє. У байєсівському аналізі часто використовують параметр точності $\eta = 1/\sigma^2$, який є оберненою величиною до дисперсії σ^2. Якщо для апріорного розподілу $\eta_0 = 1/\sigma_0^2$, то для апостеріорного $\eta_* = 1/\sigma_*^2$. Тепер (7) зводиться до вигляду

$$\eta_* = \eta_0 + n\eta,\quad \mu_* = \frac{\eta_0}{\eta_*}\mu_0 + \frac{n\eta}{\eta_*}\bar{X}. \tag{8}$$

Тобто для нормальної випадкової вибірки інформація про μ міститься у вибірковому середньому $\bar{X}$, яке є достатньою статистикою для μ. Точність ідентифікації розподілу визначається співвідношенням $\eta/\sigma^2 = n\eta$. А точність опису апостеріорного розподілу визначається сумою двох компонент: точністю представлення апріорного розподілу і характеристиками вибіркових даних. Апостеріорне середнє є зваженим середнім апріорного середнього та вибіркового середнього з ваговим коефіцієнтом, пропорційним параметру точності. Наведений результат свідчить про те, що внесок апріорного розподілу зменшується зі зростанням розміру вибірки *n*.

Правила вибору апріорного розподілу. На практиці поширені задачі, в яких початкова інформація стосовно значень оцінюваних параметрів відома лише частково. Саме тому існує потреба у формулюванні в явному вигляді правил вибору апріорних розподілів для ідентифікації таких невизначеностей. Дослідження цієї проблематики виявляє основні труднощі та суперечливі аспекти застосування байєсівського підходу до розв'язання задачі побудови статистичного висновку. Розглянемо правила, запропоновані для розв'язання цієї задачі [7, 8]. Оскільки інформація про апріорний розподіл $P(\theta)$ відсутня, то параметр θ – неінформативний. Для цього випадку Г. Джеффріс запропонував два правила вибору апріорного розподілу, які охоплюють найбільш поширені випадки. Він вважає, що у випадку існування параметра на скінченному інтервалі або на інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$ його апріорна ймовірність повинна вважатись рівномірно розподіленою. Якщо ж можна обґрунтувати, що параметр набуває значення на інтервалі від 0 до ∞, то слід вважати рівномірно розподіленою ймовірність його логарифму.

Перше правило Джеффріса для представлення невизначеності значення формулюється так:

$$P(\theta)\,d\theta \sim d\theta,\ -\infty < \theta < +\infty, \tag{9}$$

тобто $P(\theta) \sim \text{const}$. Ця функція щільності імовірності є невласною, оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(\theta)\,d\theta = \infty$. У випадку, коли $+\infty < \theta < \infty$ є достовірним твердженням, то для представлення ймовірності достовірної події замість 1 використовується ∞ [7].

Друге правило Джеффріса стосується параметрів, щодо яких можна зробити припущення, що вони набувають значення в інтервалі від 0 до ∞. Наприклад, таким параметром може слугувати величина середнього квадратичного відхилення σ. Г. Джеффріс запропонував покладати рівномірно розподіленим його логарифм, тобто якщо $\theta = \log(\sigma)$, то апріорна функція щільності імовірності для θ буде вибрана у вигляді (9). Оскільки $d\theta = \dfrac{d\sigma}{\sigma}$, то (9) припускає використання рівності

$$P(\sigma)\,d\sigma \sim \frac{d\sigma}{\sigma},\ 0 < \sigma < \infty, \tag{10}$$

як невласної функції щільності ймовірності, що буде представляти невизначеність значення параметра σ. Таким чином, для неінформативного параметра, наприклад для дисперсії, апріорний розподіл досить часто задають у вигляді $P(\sigma) \propto 1/\sigma$. Крім того, наявність такого поняття, як чутливість апріорного розподілу, пояснюється тим, що на множині різних апріорних розподілів отримують різні апостеріорні розподіли. Їх можна чітко розмежувати за допомогою процедури оцінювання ступеня впливу відмінностей у апріорних розподілах. На практиці часто використовують оцінений апостеріорний розподіл як апріорний (на другій ітерації побудови моделі), при цьому підносячи його до деякого степеня α, де $0 < \alpha < 1$.

Для невідомих параметрів використовують також "локально імовірнісні" або "пологі" функції щільності імовірності [7, 8]. При цьому пропонуються деякі "достатньо плоскі" або "пологі" апріорні щільності імовірностей, для яких функція правдоподібності набуває великих значень. За межами цих форм крива апріорної щільності не набуває ніякого теоретичного і практичного змісту, оскільки при формуванні апостеріорної щільності імовірності апріорна функція корегується множенням на малі значення функції правдоподібності (рис. 2).

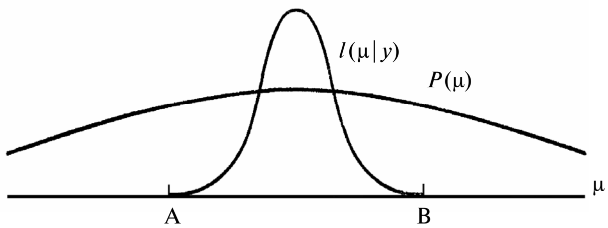

Рис. 2. Приклад "локально рівномірної" апріорної функції щільності ймовірності $P(\mu)$

Оскільки апостеріорна щільність пропорційна добутку апріорної щільності імовірності на функцію правдоподібності, то очевидно, що форма кривої вліво від точки A та вправо від точки B має незначний вплив на форму кривої апріорної щільності.

Прогнозування з використанням байєсівського підходу. Розглянемо задачу прогнозування випадкової величини x на основі попередніх вимірів y з використанням байєсівського підходу. Тобто потрібно знайти характер розподілу x при заданих значеннях y. З імовірнісної точки зору ця задача зводиться до аналізу та визначення прогнозної щільності $\pi(x|y)$, яка описує деякий "поріг змін" при заданих значеннях y. Найчастіше модель, для якої безпосередньо задається вид такої величини щільності, не існує. Водночас відома ймовірнісна модель x, що виражається в термінах $g(x|\theta)$, яка залежить від невідомого параметра θ, який у свою чергу ґрунтується на моделі, що описує відомі y. Якщо $P(\theta|y)$ – апостеріорна щільність θ при відомих даних y або якщо x та y – незалежні при заданому θ, то прогнозна щільність імовірності x має такий вигляд:

$$\pi(x|y) = \int_{\Theta} g(x|\theta)P(\theta|y)d\theta . \tag{11}$$

Якщо необхідно знайти точковий прогноз, то достатньо використати точкову оцінку величини $\pi(x|y)$. Для отримання інтервалу прогнозування необхідно обчислити інтервальні оцінки для $\pi(x|y)$ [8, 9].

Оцінювання невідомих параметрів УЛМ за допомогою байєсівського підходу. Раніше було опубліковано результати застосування УЛМ до прогнозування величини грошових збитків у сфері страхування [10]. Для оцінювання параметрів моделі скористаємось байєсівським підходом та класичним методом максимальної правдоподібності. Експериментальні дані складаються з однієї залежної змінної "Збитки", тобто розміру виплаченої страховки для автомобілів трьох брендів (ВАЗ, Mitsubishi, Toyota). Регіон продажу полісу: Київ, АР Крим і Одеса; рік випуску автомобіля – 2006 р. Загальний розмір вибірки – 9546 значень. Особливості побудованих моделей, характер розподілу початкової змінної і функцію зв'язку наведено у табл. 1 [10]. Результати оцінювання узагальнених лінійних моделей подано у табл. 2.

Із табл. 2 видно, що оцінки, отримані за допомогою байєсівського підходу та нормального розподілу, "близькі" до класичних результатів, одержаних за допомогою методу максимальної правдоподібності, але з уточненими показниками дисперсії і стандартного відхилення. Крім того, коефіцієнт детермінації, отриманий у результаті оцінювання за допомогою байєсівського підходу, свідчить про приблизно однакові результати без вагомих "стрибків". У задачі вибору кращої моделі прогнозування величини збитків байєсівський підхід спирається не на наближені припущення оцінок, а на вагомо уточнені результати оцінювання невідомих параметрів УЛМ. Отже, прийнятною для практичного використання є модель із законом розподілу Пуассона та експоненціальною функцією зв'язку. Про це свідчать мінімальна величина похибки, показники значущості моделі, максимально наближені до фактичних даних прогнозні значення, а також достовірна оцінка величини ризику, обчислена з використанням байєсівського підходу. Нормальна модель з тотожною функцією зв'язку дає можливість отримати результат за одну ітерацію із відносною похибкою 1,62 %, але "слаб-

Таблиця 1. Особливості та результати прогнозування УЛМ

Моделі		Сумарні прогнозні значення збитків	Реальні сумарні значення збитків	Відхилення	Ризик втрат
Характер розподілу початкової змінної	Функція зв'язку				
Гамма	LOG	102008320,905	17921032,581	84087288,32	1,301
Нормальний	LOG	18111231,380		190198,799	0,495
Пуассона	LOG	17921032,574		0,007	0,547
Нормальний	Тотожна	17921032,589		0,009	0,532

Таблиця 2. Результати оцінювання параметрів моделі

Метод максимальної правдоподібності			Байєсівський підхід			
Середнє значення	Стандартне відхилення	Дисперсія, %	Середнє значення	Стандартне відхилення	Дисперсія, %	R^2
11805,69	**15358,12**	**130,091**	**11804,346**	**15247,237**	**128,669**	**0,89735**
1897,457	939,91	49,535	1897,294	939,94	49,4	0,99854
1877,531	1027,567	54,73	1877,301	1027,552	55,679	0,99887
1877,531	999,302	53,224	1876,909	999,751	53,809	0,99998

кими" прогнозними значеннями збитків та хибною оцінкою ризику, що і підтверджено результатами оцінювання з використанням байєсівського підходу.

У табл. 3 наведено результати оцінювання ймовірності повернення кредиту для двох вікових груп: 1-ї групи (20—35 років) та 2-ї групи (36—50 років) з використанням альтернативних моделей. Як незалежні використано такі змінні: історія кредитування клієнта (позитивна, нейтральна, негативна), вікова група, середній заробіток, сімейний стан, стаж роботи, стать, регіон проживання, експертна оцінка (позитивна, нейтральна, негативна).

***Таблиця* 3.** Результати оцінювання ймовірності повернення кредиту

Вікова група	Ймовірність повернення кредиту за різними моделями			
	logit	probit	log-log	c-log-log
1-ша	0,653	0,667	0,674	0,670
2-га	0,774	0,778	0,829	0,803

Отримані результати відповідають дійсній ситуації з поверненнями кредитів для вибраного фінансового підприємства, а також збігаються з результатами прогнозування ймовірності повернення кредиту, отриманими авторами раніше за допомогою байєсівських мереж.

Висновки

Застосування байєсівського підходу до оцінювання невідомих параметрів УЛМ та вибору кращої моделі дає можливість точніше оцінювати прогнозні моделі, оперувати не тільки отриманими оцінками, а й відповідними ймовірнісними розподілами. Це дає змогу докладніше описати структуру і зміст досліджуваної моделі.

На основі фактичних даних стосовно виплат за полісами автомобільного страхування побудовано модель для прогнозування актуарного процесу. Модель побудована, виходячи з припущень стосовно відомого закону розподілу та оцінок параметрів моделі з використанням байєсівського підходу. Прийнятною для подальшого використання виявилась модель із законом розподілу Пуассона та експоненціальною функцією зв'язку. Цей факт пояснюється мінімальною величиною похибки, показником адекватності моделі, максимальним наближенням до реальних даних прогнозних значень, а також достовірною оцінкою величини ризику. Нормальна модель з тотожною функцією зв'язку дає можливість отримати результат за одну ітерацію з невеликим значенням відносної похибки 1,62 %, але "слабкими" прогнозними значеннями збитків.

Розглянутий приклад свідчить, що для оцінювання невідомих параметрів УЛМ зручно використовувати байєсівський підхід, оперуючи апріорними та апостеріорними розподілами параметрів, а також алгоритмами вибору кращої моделі. Залучення новітніх комбінованих методів до оцінювання невідомих параметрів УЛМ та вибору кращої моделі на основі максимального наближення прогнозного значення до реальних даних відкриває нові можливості для дослідження властивостей методів математичного моделювання.

У подальших дослідженнях доцільно розглянути такі задачі: підвищення адекватності прогнозної моделі; аналіз факторів ризику, які впливають на страхові випадки, з використанням методів комбінованого аналізу; залучення математичного апарату методів інтелектуального аналізу даних — нейронних мереж, дерев рішень, методу опорних векторів і байєсівських мереж до моделювання та прогнозування актуарних процесів. Також необхідно дослідити точність і збіжність оцінок параметрів, отриманих альтернативними методами, виконати порівняння з методами Монте-Карло тощо.

Список літератури

1. *Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимощук О.Л.* Аналіз часових рядів. — К.: Політехніка, 2013. — 600 с.
2. *R.H. Shumway and D.S. Stoffer,* Time series analysis and its applications. New York: Springer, 2006, 598 p.
3. *A. Romano and G. Secundo,* Dynamic learning methods. New York: Springer, 2009, 190 p.
4. *P. McCullagh and J.A. Nelder,* Generalized Linear Models. New York: Chapman & Hall, 1989, 526 p.
5. *R.S. Tsay,* Analysis of financial time series. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010, 715 p.
6. *J. Besag,* "Markov Chain Monte Carlo for Statistical Inference", Center for Statistics and the Social Sciences, Working Paper no. 9, 25 p., 2001.
7. *D.J.C. MacKay,* Information Theory, Inference, and Learning Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 640 p.

8. *N. da Costa Lewis.* Market Risk Modeling. Applied Statistical Methods for Practitioners. London: Risk Waters Group Ltd., 2003, 238 p.
9. *N. Bergman,* "Recursive Bayesian Estimation: Navigation and Tracking Applications", Linkoping University (Sweden), TR no. 579, 219 p., 1999.
10. *Трухан С.В., Бідюк П.І.* Прогнозування актуарних процесів за допомогою узагальнених лінійних моделей // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 2. – С. 14–20.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
6 жовтня 2014 року