

## МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО ТА МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 532.542

О.М. Бердник

### ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ ЛАМІНАРНОГО ПОТОКУ В КІЛЬЦЕВИХ КАНАЛАХ З РОЗВИНУТОЮ ПОВЕРХНЕЮ

With a research objective of influence of parameters of the developed surface on structure of a laminar current of viscous incompressible liquid in ring channels the computing model, and algorithm of creation of profiles of speed has been offered. This case deals with a homogeneous layer of obstacles – cylindrical protrusions, distance between which ensures the absence of hydrodynamics interactions. Numerical calculations allowed to analyse dependence of the maximum and average speeds of a stream from density of ledges on a surface of the channel and from their height. In practical standpoint the mathematical model is significant only when moving liquids with very low speed or in fine capillaries, or at conditions from enough viscous liquids (so-called “creeping flow” when  $Re \ll 1$ ). Check of reliability of the received results is executed on limit cases which lead to already known tasks. Research showed that the offered computing model adequately displays the main features of process. The presented technique of creation of profiles of speed of a laminar stream in ring channels with the developed surface can be used for further studying of a turbulent mode, and also for developing engineering methods of calculation of ring channels with turbulizers.

**Keywords:** duct flows, developed surface, mathematical models of viscous flows.

#### Вступ

Моделювання процесів тепло- і масообміну є одним із найважливіших напрямів сучасної науки, що має велике практичне значення як для стаціонарної, так і для промислової енергетики. Особлива увага цьому питанню приділяється при конструюванні реактивної та ракетної техніки.

Ефективність енергетичної системи у цілому визначається конструкцією окремих її елементів. Застосування ребер на внутрішній поверхні каналу вважається доцільним у низці випадків, особливо при ламінарному режимі течії теплоносія [1]. Кільцеві канали є досить поширеними в теплообмінних пристроях авіаційної та ракетної техніки [2]. Тому дослідження структури потоку в кільцевих каналах з розвинутою поверхнею за рахунок виступів на стінках, висота яких перевищує товщину в'язкого прилеглового шару, можуть стати корисними для спеціалістів, що займаються розрахунком та проектуванням компактних теплообмінників.

На сьогодні накопичено чимало відомостей про закономірності теплообміну та гідродинаміки в гладких каналах, що мають форму кільця [1–7]. Проте дослідження щодо пошуку нових ефективних конструкцій теплообмінного устаткування продовжуються.

#### Постановка задачі

Мета роботи – дослідити вплив параметрів розвинутої поверхні на структуру ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в кільцевих каналах.

#### Вихідні положення

Уявимо, що поверхня кільцевого каналу є розвинутою за рахунок рівномірно розподілених циліндричних виступів висотою  $h$ , причому діаметр індивідуальної перешкоди досить малий ( $d_i \leq 10^{-2}h$ ), а відстань між ними забезпечує відсутність їх гідродинамічної взаємодії. Слід зауважити, що практично представлена нижче математична модель має значення лише при русі рідин з дуже малими швидкостями або в тонких капілярах чи за умови досить в'язких рідин (так званий “повзучий потік”, коли  $Re \ll 1$ ).

Виявлення властивостей вимушеної течії ізотермічної в'язкої нестисливої рідини за наявності вказаних перешкод на стінках каналу потребує моделювання взаємодії останніх з потоком. Тому, розглядаючи ділянку гідродинамічної стабілізації, зробимо припущення, що вплив виступів на рух рідини можна описати розподіленою об'ємною силою [8]. Якщо ж поділити умовно область кільця (нормального перерізу кільцевого каналу) на три частини:

$$D_1 : R_1 \leq r \leq R_1 + h; D_2 : R_1 + h < r < R_2 - h;$$

$$D_3 : R_2 - h \leq r \leq R_2,$$

(де  $r$  – відстань від осі каналу;  $h$  – висота виступів;  $R_1, R_2$  – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кільця), то дві з них –  $D_1$  і  $D_3$  – характеризуватимуться гальмуванням потоку за рахунок перешкод на стінках (рис. 1).

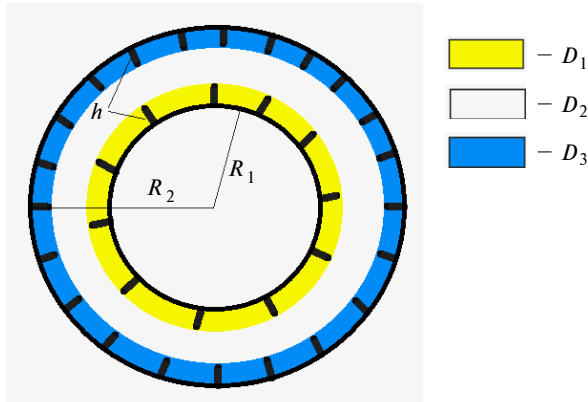


Рис. 1. Переріз кільцевого каналу з розвинутою поверхнею

Для врахування такої особливості ламінарного потоку в кільцевому каналі з розвинутою поверхнею запропоновано рівняння руху з розривною правою частиною (розрив тут забезпечується розподіленою об'ємною силою, яка діє або не діє на потік з боку виступів):

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{\Delta p}{l} + \begin{cases} k\rho n_1(r) d_i U, & r \in D_1; \\ 0, & r \in D_2; \\ k\rho n_2(r) d_i U, & r \in D_3; \end{cases} \quad (1)$$

де  $\mu$ , м/с, – коефіцієнт динамічної в'язкості;  $U = U(r)$ , м/с, – складова швидкості потоку вздовж каналу;  $\Delta p = p_2 - p_1 < 0$ ,  $H/\text{м}^2$ , – перепад тиску в каналі;  $l$ , м, – довжина каналу;  $\rho$  – густина,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $d_i$ , м, – діаметр циліндричного виступу;  $n(r)$ ,  $1/\text{м}^2$ , – концентрація перешкод на одиниці площі циліндричної поверхні радіуса  $r$ ; при цьому  $n_1(r) = n(R_1) \cdot R_1/r$ ;  $n_2(r) = n(R_2) \cdot R_2/r$ ;  $k$ , м/с, – емпіричний коефіцієнт.

Відповідно до фізичного змісту процесу, що досліджується, необхідно також врахувати виконання межових умов (умов прилипання):

$$U(R_1) = U(R_2) = 0, \quad (2)$$

а також умов спряження (за рахунок неперервності швидкості  $U$  та тертя  $\tau$ ) на рівнях умовного поділу областей:

$$\begin{aligned} U_1 &= U(R_1 + h - 0) = U(R_1 + h + 0), \\ U_2 &= U(R_2 - h - 0) = U(R_2 - h + 0), \\ \tau_1 &= \tau(R_1 + h - 0) = \tau(R_1 + h + 0), \\ \tau_2 &= \tau(R_2 - h - 0) = \tau(R_2 - h + 0). \end{aligned} \quad (3)$$

### Математична постановка задачі у безрозмірній формі

З метою зменшення параметрів задачі (1)–(3) пропонується ввести безрозмірні змінні:

$$\tilde{r} = r/R_2, \quad \tilde{U} = U/W, \quad \tilde{\tau} = \tau/\tau_w,$$

$$\text{де } W = -\frac{\Delta p \cdot R_2^2}{4\mu \cdot l}, \quad \tau_w = \tau(R_2) = -\frac{\Delta p \cdot R_2}{2 \cdot l}.$$

Тоді безрозмірний профіль швидкості можна буде побудувати, розв'язавши таке рівняння:

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right) = -4 + \begin{cases} \frac{A_1 \cdot \tilde{U}}{\tilde{r}}, & \tilde{r} \in [r_0, r_0 + \tilde{h}]; \\ 0, & \tilde{r} \in (r_0 + \tilde{h}, 1 - \tilde{h}); \\ \frac{A_2 \cdot \tilde{U}}{\tilde{r}}, & \tilde{r} \in [1 - \tilde{h}, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

При цьому, відповідно, набудуть нового вигляду межові умови та умови спряження:

$$\tilde{U}(r_0) = \tilde{U}(1) = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \tilde{U}(r_0 + \tilde{h} - 0) = \tilde{U}(r_0 + \tilde{h} + 0), \\ \tilde{U}_2 &= \tilde{U}(1 - \tilde{h} - 0) = \tilde{U}(1 - \tilde{h} + 0); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1 &= \tilde{\tau}(r_0 + \tilde{h} - 0) = \tilde{\tau}(r_0 + \tilde{h} + 0); \\ \tilde{\tau}_2 &= \tilde{\tau}(1 - \tilde{h} - 0) = \tilde{\tau}(1 - \tilde{h} + 0), \end{aligned}$$

де  $r_0 = R_1/R_2$  – безрозмірний радіус меншої поверхні кільцевого каналу;  $\tilde{h} = h/R_2$  – безрозмірна висота виступів-перешкод;  $A_1 = k \cdot n(R_1) \times d_i \cdot R_1 R_2 / \nu$ ;  $A_2 = k \cdot n(R_2) \cdot d_i R_2^2 / \nu$  – безрозмірні щільності виступів на меншій та більшій поверхнях кільцевого каналу відповідно ( $\nu$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ , – коефіцієнт кінематичної в'язкості).

### Розв'язок і аналіз задачі

Певна складність задачі (4)–(6) полягає в тому, що вона формулюється різними рівняннями в областях  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ . Тому пошук розв'язку необхідно здійснювати поетапно.

Спочатку розглянемо область  $\tilde{D}_2$ :  $\tilde{r} \in (r_0 + \tilde{h}, 1 - \tilde{h})$ . Для неї розв'язок рівняння (4) має такий вигляд:

$$\tilde{U}(\tilde{r}) = -\tilde{r}^2 + C_1 \ln|\tilde{r}| + C_2. \quad (7)$$

При цьому  $C_1, C_2$  знайдемо з припущення, що значення  $\tilde{U}_1$  і  $\tilde{U}_2$  відомі (насправді їх обчислимо пізніше):

$$C_1 = \frac{\tilde{U}_1 - \tilde{U}_2 + (r_0 + 1)(r_0 + 2\tilde{h} - 1)}{\ln \frac{r_0 + \tilde{h}}{1 - \tilde{h}}},$$

$$C_2 = \frac{\ln(r_0 + \tilde{h})[\tilde{U}_2 + (1 - \tilde{h})^2]}{\ln \frac{r_0 + \tilde{h}}{1 - \tilde{h}}} - \frac{\ln(1 - \tilde{h})[\tilde{U}_1 + (r_0 + \tilde{h})^2]}{\ln \frac{r_0 + \tilde{h}}{1 - \tilde{h}}}. \quad (8)$$

З урахуванням (7), (8) безрозмірне тertia для області  $\tilde{D}_2$  визначатиметься так:

$$\tilde{\tau}(\tilde{r}) = -\frac{1}{2} \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} = \tilde{r} - \frac{C_1}{2 \cdot \tilde{r}}, \quad \tilde{r} > 0. \quad (9)$$

Таким чином, виявляється, що на рівнях  $\tilde{r} = 1 - \tilde{h}$  і  $\tilde{r} = r_0 + \tilde{h}$  за будь-яких умов  $\tilde{\tau}(\tilde{r})$  є незмінним:

$$\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}(r_0 + \tilde{h} + 0) = (r_0 + \tilde{h}) - \frac{C_1}{2 \cdot (r_0 + \tilde{h})};$$

$$\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}(1 - \tilde{h} - 0) = (1 - \tilde{h}) - \frac{C_1}{2 \cdot (1 - \tilde{h})}. \quad (10)$$

Із співвідношень (9), (10) отримуємо

$$\frac{d\tilde{U}(r_0 + \tilde{h})}{d\tilde{r}} = -2(r_0 + \tilde{h}) + C_1 / (r_0 + \tilde{h}), \quad (11)$$

$$\frac{d\tilde{U}(1 - \tilde{h})}{d\tilde{r}} = -2(1 - \tilde{h}) + C_1 / (1 - \tilde{h}), \quad (12)$$

що буде використано далі. При цьому єдиною проблемою у виразах (11) і (12) залишається коефіцієнт  $C_1$ . Його значення можна знайти, якщо згадати про симетричність потоку в "центрі" кільця. Зокрема,

$$\left. \frac{d\tilde{U}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r} = \frac{(r_0 + 1)}{2}} =$$

$$= -(r_0 + 1) + 2 \cdot C_1 / (r_0 + 1) = 0,$$

звідки

$$C_1 = \frac{(r_0 + 1)^2}{2}. \quad (13)$$

Тоді, якщо розглядати область  $\tilde{D}_1: \tilde{r} \in [r_0, r_0 + \tilde{h}]$ , то рівняння (4) набуде вигляду

$$\tilde{r}\tilde{U}'' + \tilde{U}' - A_1\tilde{U} + 4\tilde{r} = 0. \quad (14)$$

Причому межовими для цього випадку будуть умови (5) та (11) з урахуванням знайденого значення (13) для коефіцієнта  $C_1$ .

Аналогічно, якщо розглядати область  $\tilde{D}_3: \tilde{r} \in [1 - \tilde{h}, 1]$ , то рівняння (4) набуде також вигляду (14) при  $A_1 = A_2$ . Проте для цієї частини потоку як межові умови будуть виступати (5) та (12).

Загальний розв'язок (14) можна знайти аналітично в рамках можливостей *Symbolic Math Toolbox* пакета прикладних програм MATLAB:

$$\tilde{U}(\tilde{r}) = c_1 Y_0(2i\sqrt{A_1}\tilde{r}) + c_2 J_0(2i\sqrt{A_1}\tilde{r}) + \frac{4}{A_1^2} (1 + A_1\tilde{r}), \quad (15)$$

де  $c_1, c_2$  – const,  $J_0(t)$  і  $Y_0(t)$  – функції Бесселя першого та другого роду. Проте для кожної з областей  $\tilde{D}_1$  і  $\tilde{D}_3$  відповідно до різних межових умов вираз (15) набуде різного змісту (отримані результати є досить громіздкими, тому в роботі не наводяться).

Очевидно, що тепер можна однозначно побудувати відповідні профілі безрозмірної швидкості  $\tilde{U}(\tilde{r})$  при заданих параметрах, наприклад при  $r_0 = R_1/R_2 = 0,2$ ;  $h = 0,1$  і  $A = A_1 = A_2 = 0,50,100$  (рис. 2). При цьому необхідно дотримуватись такого алгоритму:

- спочатку на основі відповідних аналітичних виразів для областей  $\tilde{D}_1$  і  $\tilde{D}_3$  обчислити

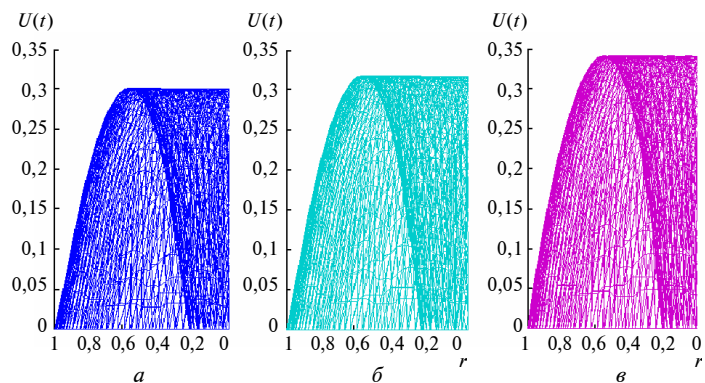


Рис. 2. Профілі безрозмірної швидкості в кільцевому каналі з розвинутою поверхнею ( $h = 0,1$ ;  $r_0 = 0,2$ ): а –  $A = 100$ ; б –  $A = 50$ ; в –  $A = 0$

**Таблиця.** Залежність максимальної та середньої швидкостей по перерізу кільцевого каналу від щільності виступів на поверхні при  $h = 0,1$

$A$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\tilde{U}_{\max}$	0,3411	0,3357	0,3307	0,3261	0,3219	0,3180	0,3143	0,3108	0,3076	0,3046	0,3017
$\tilde{U}_{\text{average}}$	0,2213	0,2168	0,2126	0,2087	0,2051	0,2017	0,1985	0,1955	0,1927	0,1901	0,1876
$\frac{\tilde{U}_{\max}}{\tilde{U}_{\text{average}}}$	1,5413	1,5484	1,5555	1,5627	1,5696	1,5765	1,5833	1,5900	1,5963	1,6021	1,6081

значення  $\tilde{U}(\tilde{r})$ ; уявні частини комплекснозначних функцій Бесселя при побудові розрахункових точок було відкинуто;

- потім  $\tilde{U}_1$  надавалось останнє значення безрозмірної швидкості для  $\tilde{r} \in [r_0, r_0 + \tilde{h}]$ , а  $\tilde{U}_2$  – перше значення безрозмірної швидкості для  $\tilde{r} \in [1 - \tilde{h}, 1]$ ;

- нарешті, попередньо обчисливши (8), ми отримали можливість побудувати профіль швидкості для  $\tilde{r} \in (r_0 + \tilde{h}, 1 - \tilde{h})$ .

Розрахунки показали, що відношення максимальної швидкості  $\tilde{U}_{\max}(\tilde{r})$  до її середнього значення  $\tilde{U}_{\text{average}}(\tilde{r})$  по перерізу кільцевого каналу зростає зі збільшенням щільності перешкод  $A$  (таблиця).

Можна бачити на рис. 3, що швидкість такого зростання значно більша при вищій висоті перешкод  $h$ , але при  $A \rightarrow 0$  відношення  $\frac{\tilde{U}_{\max}}{\tilde{U}_{\text{average}}} \rightarrow \frac{3}{2}$ , що добре узгоджується з відомими результатами [9, с. 118] для випадку гладкого кільцевого каналу і свідчить про коректність запропонованої моделі.

Таким чином, можна стверджувати, що розроблений алгоритм розв'язання поставленої задачі дає достовірні результати.

### Список літератури

1. *Интенсификация теплообмена. Успехи теплопередачи* / Под ред. проф. А.А. Жукаускаса и проф. Э.К. Калинина. – Вильнюс: Мокслас, 1988. – Т. 2. – 188 с.
2. *Жукаускас А.А.* Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
3. *Мухачев Г.А., Шукин В.К.* Термодинамика и теплопередача: Учебник для авиац. вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1991. – 495 с.
4. *Слэжкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гос. изд. тех.-теорет. лит.-ры, 1955. – 521 с.
5. *Слесаренко А.П., Котульский Д.А.* Математическое моделирование ламинарного изотермического течения жидкости в кольцевых каналах при наличии эксцентриситета // *Доповіді НАНУ.* – 2010. – № 3. – С. 92–96.
6. *Митрофанова О.В.* Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков в каналах ядерно-энергетических установок. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
7. *Буглаев В.Т., Курбатская Н.А., Беленькая Л.И.* Исследование теплоотдачи в кольцевых каналах воздушно-

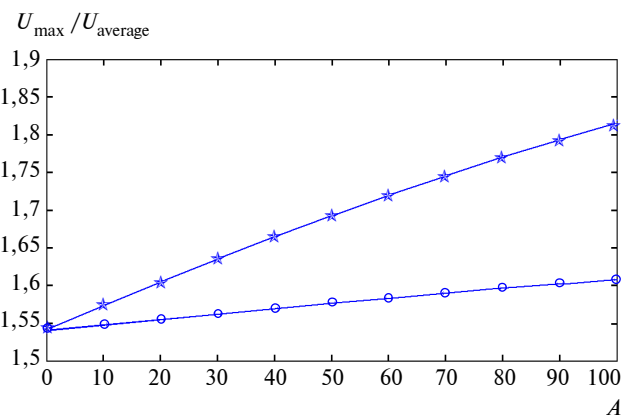


Рис. 3. Вплив параметрів розвинутої поверхні на основні характеристики безрозмірної швидкості: —○— при  $h = 0,1$ ; —★— при  $h = 0,2$

### Висновки

Досліджено вплив параметрів розвинутої поверхні на структуру ламінарного потоку в'язкої нестисливої рідини в кільцевих каналах. На основі порівняння залежностей, наведених на рис. 2 і 3, можна зробити висновок, що запропонована обчислювальна модель досліджуваного процесу адекватно відображає основні його особливості. Методика ж побудови розподілів поздовжньої швидкості може бути використана при подальшому вивченні турбулентного режиму та при розробці інженерних методів розрахунку кільцевих каналів з турбулізаторами.

- гревательных устройств // Интенсификация работы теплоэнергетических установок: Сб. науч. тр. – Брянск: изд-во БГТУ, 2000. – С. 93–106.
8. *Бердник О.М.* Про вплив неоднорідного шару перешкод на стабілізований потік рідини в круглій трубі // Матер. X Міжнар. науково-техн. конф. “АВІА-2011”. – К.: НАУ, 2011. – Т. 1. – С. 6.72–6.75.
9. *Аэрогидромеханика: Учебник для авиационных специальностей вузов / А.М. Мхитарян, В.В. Ушаков, А.Г. Баскакова, В.Д. Трубенюк.* – М.: Машиностроение, 1984. – 352 с.

Рекомендована Радою  
Механіко-машинобудівного інституту  
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції  
20 травня 2014 року