УДК 517.956.4

С.Д. Івасишен, Н.І. Турчина
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ РОЗВ’ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Background. The known E-I approach by S.D. Eidelman and S.D. Ivasyshen allowed to characterize wide classes of solutions for parabolic equations with limited coefficients, in particular, to describe their ranges of initial values, to get the integral representation and to find out in what sense the initial conditions are met; if the coefficients of equations, as functions of x, can grow without limit at infinity, then these results do not almost exist.
Objective. The purpose is to consider Dirichlet and Neumann problems in the half-space, in which the boundary conditions are homogeneous, as initial values belong to a special weighted Φ_p^a paces of functions or generalized measures for a homogeneous model Fokker-Planck-Kolmogorov equation of normal markovian process, that contains growing coefficients and to implement E-I approach for such problems solutions.
Methods. The method modification, which was used for equations with limited coefficients, based on a detailed studying of the Poisson operators properties, generated by Green's functions of corresponding problems.
Results. The correct solvability and the integral representation are established by using Poisson operators of the solutions of such problems. Boundary value problems are investigated in the families of weight L_p-spaces of functions increasing exponentially as $|x| \to \infty$. These functions have the maximum exponent of growth 2 and the type depend on t. It was also clarified in what sense the solutions satisfy those initial conditions. Considered classes of solutions are characterized as the range of the Poisson operators defined on the spaces Φ_p^a.
Conclusions. The article results show, how the presence in the equation of members with growing coefficients is manifested. They allow predicting similar results for more general boundary value problems and identify ways to obtain them.
Keywords: Fokker–Plank–Kolmogorov equation of normal markovian process; Dirichlet and Neumann problems; Green's function; Poisson operator; correct solvability; integral representation; weight L_p-spaces; solutions characterizition.

Вступ

С.Д. Ейдельманом і С.Д. Івасишеним запропоновано підхід Е-І [1], який дає змогу повністю характеризувати широкі класи U розв’язків параболічних рівнянь. Розв’язки з цих кла-сів визначені в областях $\Pi_T := (0,T]\times\mathbb{R}^n$ і $Q_T := (0,T]\times\Omega$, де $T>0$, Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$, і як функції просторової змінної x мають при $|x|\to\infty$ експоненціальний ріст максимально можливого порядку із залежним від часової змінної t типом. При реалізації підходу Е-І для класу U вирішуються такі питання: 1) за яких умов існує і є єдиним розв’язок із класу U; 2) якими є множини початкових значень (при $t=0$) розв’язку і в якому сенсі розв’язок задовольняє початкову умову; 3) за яких умов правильне інтегральне зображення розв’язку через його початкові значення. Підхід Е-І багатократно реалізовувався багатьма авторами (див. огляд в [1]). Переважна більшість результатів цієї реалізації стосувалась визначених у Π_T розв’язків параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами. Характеризації класів розв’язків рівнянь з обмеженими коефіцієнтами в Q_T присвячені праці [2, 3]. Якщо коефіцієнти рівнянь необмежено зростають при $|x|\to\infty$, то подібних результатів у літературі майже немає, а для випадку області Q_T зовсім немає.

Тим часом параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами виникають при математичному моделюванні реальних процесів (наприклад, у задачах теорії випадкових процесів, статистичної радіотехніки [4–6]). Так, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера–Планка–Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [6, с. 177–179]. Серед таких рівнянь, зокрема, є рівняння

$$(Lu)(t,x):=\partial_t u(t,x)-\sum_{j=1}^{n}[a^2\partial_{x_j}^2 u(t,x)+$$
$$+b\partial_{x_j}(x_j u(t,x))]=$$
$$=f(t,x), t>0, x:=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n, \quad (1)$$

у якому a і b – дійсні сталі, причому $a>0$.

Для цього і більш загального рівняння в області Π_T у статті [7] реалізовано підхід Е-І, в результаті чого охарактеризовано відповідні класи розв'язків та вирішено зазначені вище питання 1–3.

У статті авторів [8] розглянуто такі дві задачі для рівняння (1):

$$(Lu)(t,x)=f(t,x),(t,x)\in\Pi_T^+, \quad (2)$$

$$(B^{(l)}u)(t,x)|_{x_n=0}=g(t,x'),\ (t,x')\in\Pi'_T, \quad (3)$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x), x\in\mathbb{R}_+^n, \quad (4)$$

де $x:=(x',x_n)$, $x':=(x_1,...,x_{n-1})$, $\mathbb{R}_+^n:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$, $\Pi_T^+:=\{(t,x)\in\mathbb{R}_+^n \mid t\in(0,T],x\in\mathbb{R}_+^n\}$, $\Pi'_T:=\{(t,x')\in\mathbb{R}^n \mid t\in(0,T],\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$, $T>0$, $l\in\{1,2\}$, $B^{(1)}=1$ (умова Діріхле), $B^{(2)}=\partial_{x_n}$ (умова Неймана). Для цих задач знайдено в явному вигляді вектор-функції Гріна та досліджено їх властивості. Зокрема, однорідні функції Гріна задач (2)–(4), тобто такі функції $G_0^{(l)}$, що розв'язки цих задач для $f=0, g=0$ і підходящої функції φ визначаються формулою

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}_n^+}G_0^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x)\in\Pi_T^+, \quad (5)$$

мають вигляд

$$G_0^{(l)}(t,x,\xi):=(4\pi a^2 q(t))^{-n/2}e^{nbt}(E_{1/(4a^2)}(t,x,\xi)+$$
$$+(-1)^l E_{1/(4a^2)}(t,x,(\xi',-\xi_n))), \quad (6)$$
$$t>0,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n,\ l\in\{1,2\},$$

де $q(t):=\begin{cases}\frac{1}{2b}(e^{2bt}-1), b\neq 0,\\ t, b=0;\end{cases}$

$$E_c(t,x,\xi):=\exp\{-c(q(t))^{-1}|e^{bt}x-\xi|^2\}, c>0. \quad (7)$$

За допомогою формул (6) для $G_0^{(l)}$, $l\in\{1,2\}$, встановлено оцінки

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta G_0^{(l)}(t,x,\xi)|\le C_{\alpha\beta}(q(t))^{-(n+|\alpha|+|\beta|)/2}e^{(n+|\alpha|)bt}\times$$
$$\times E_c(t,x,\xi), t>0,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+^n, \quad (8)$$

де α,β – довільні мультиіндекси, $C_{\alpha\beta}$ і c – додатні сталі, а також властивість нормальності та формулу згортки:

$$G_0^{(l)}(t,x,\xi)=\int_{\mathbb{R}_n^+}G_0^{(l)}(t-\gamma,x,y)G_0^{(l)}(\gamma,y,\xi)dy,$$
$$0<\gamma<t,\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_n^+. \quad (9)$$

Ця інформація про $G_0^{(l)}$ дає змогу отримати для рівняння (1) в області $Q_T=\Pi_T^+$ результати, подібні до результатів із [7]. Наведенню таких результатів присвячена наша стаття.

Постановка задачі

Розглядатимемо задачі про знаходження розв'язків однорідного рівняння

$$Lu=0 \text{ в } \Pi_T^+, \quad (10)$$

які задовольняють однорідні крайові умови Діріхле чи Неймана:

$$B^{(l)}u|_{x_n=0}=0, \quad (11)$$

та деякі початкові умови:

$$u|_{t=0}=\varphi. \quad (12)$$

Мета роботи – означити спеціальні вагові простори Φ_p^a, $p\in[1,\infty]$, функцій чи узагальнених мір φ, які, будучи взяті за початкові дані в (12), забезпечують коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задач (10)–(12) у сімействах вагових L_p-просторів функцій, які при $|x|\to\infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку із залежним від t типом.

Означення просторів

Використовуватимемо вагові функції, норми та простори, подібні до тих, які означено й застосовано в [7].

Якщо вважати, що функція φ з умови (12) задовольняє нерівність

$$|\varphi(x)| \le C\exp\{a|x|^2\},\ x \in \mathbb{R}_n^+, \qquad (13)$$

де $a \ge 0$, і за такої початкової функції побудувати розв'язок задачі (10)–(12) за допомогою формули (5), то цей розв'язок, взагалі кажучи, має оцінку

$$|u(t,x)| \le C\exp\{k(t,a)|x|^2\},\ (t,x) \in \Pi_T^+.$$

Використовуючи формулу (5) та оцінки (8) і (13), отримаємо, що для знаходження функції k треба оцінити зверху функцію

$$f(\xi) := -c_0(q(t))^{-1}|e^{bt}x - \xi|^2 + a|\xi|^2,\ \xi \in \mathbb{R}_n^+,$$

при фіксованих $(t,x) \in \Pi_T^+$, $a \ge 0$ і $c_0 \in (0,c)$, де стала c з оцінки (8). Оскільки

$$f(\xi) \le -c_0(q(t))^{-1}(e^{bt}|x| - |\xi|)^2 + a|\xi|^2,$$

то досить знайти максимум функції

$$f_0(r) := -c_0(q(t))^{-1}(e^{bt}|x| - r)^2 + ar^2,\ r \ge 0.$$

Цей максимум, як легко переконатися, дорівнює

$$\frac{c_0ae^{2bt}}{c_0 - aq(t)}|x|^2,$$

якщо $a \ge 0$ вибрати так, щоб $q(T) < \frac{c_0}{a}$.

Отже, справджується оцінка

$$-c_0(q(t))^{-1}|e^{bt}x - \xi|^2 + a|\xi|^2 \le$$
$$\le \frac{c_0ae^{2bt}}{c_0 - aq(t)}|x|^2 = k(t,a)|x|^2 \le \hat{k}(t,a)|x|^2, \qquad (14)$$
$$t \in (0,T],\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+^n,$$

де функції k і $\hat{k}$ визначені формулами

$$k(t,a) := \frac{c_0ae^{2bt}}{c_0 - aq(t)},$$

$$\hat{k}(t,a) := \frac{c_0ae^{2|b|t}}{c_0 - aq(t)},\ t \in [0,T].$$

Зауважимо, що $k(0,a) = \hat{k}(0,a) = a$, $k(t,a) = \hat{k}(t,a)$, $t \in [0,T]$, якщо $b > 0$, і $k(t,a) < \hat{k}(t,a)$, $t \in [0,T]$, при $b < 0$; функція $\hat{k}$ монотонно зростає від значення $\hat{k}(0,a)$ до $\hat{k}(T,a)$; функція k має напівгрупову властивість

$$k(t-\tau, k(\tau,a)) = k(t,a), 0 \le \tau \le t \le T. \qquad (15)$$

Введемо вагові функції

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu k(t,a)|x|^2\},$$
$$\hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\{\nu\hat{k}(t,a)|x|^2\},\ (t,x) \in \Pi_T^+, \nu \in \mathbb{R}. \ (16)$$

Поведінка при $|x| \to \infty$ з означених нижче просторів описуватиметься функціями Ψ_ν і $\hat{\Psi}_\nu$ з $\nu \in \{-1,1\}$.

Зауважимо, що на підставі (14)–(16) та означення (7) функції E_{c_0} справджуються такі нерівності:

$$\hat{\Psi}_{-1}(t,x) \le \Psi_{-1}(t,x) \le \Psi_1(t,x) \le$$
$$\le \hat{\Psi}_1(t,x), (t,x) \in \Pi_T^+,$$
$$E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\Psi_1(\tau,x) \le \Psi_1(t,x) \le \qquad (17)$$
$$\le \hat{\Psi}_1(t,x),\ 0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Використовуватимемо для функцій $u : \Pi_T^+ \to$ $\to \mathbb{C}$ при кожному $t \in [0,T]$ такі вагові норми:

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} := \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} := \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, p \in [1,\infty].$$

Зауважимо, що з (17) випливає нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)},\ t \in [0,T], p \in [1,\infty].$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$, $p \in [1,\infty]$, і Φ_p^a, $p \in [1,\infty]$, простори вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$ зі скінченними відповідно нормами $\|\varphi(\cdot)\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi(\cdot)\|_p^a$, $\|\varphi(\cdot)\|_p^{k(0,a)}$. Говоритимемо, що функція $u : \Pi_T^+ \to \mathbb{C}$ належить до простору $L_p^{k(\bullet,a)}$, якщо $u(t,\cdot) \in L_p^{k(t,a)}$ для кожного $t \in [0,T]$ і $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} < \infty$.

Нехай B — σ-алгебра борелевих множин півпростору $\mathbb{R}_+^n$, а M — сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : B \to \mathbb{C}$ (узагальнених борелевих мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через Φ_1^a позначимо сукупність усіх узагальнених борелевих мір $\varphi: B \to \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int_A \Psi_{-1}(0,x)\,d\varphi(x),\ A \in B,$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\varphi \in \Phi_1^a$

$$\|\varphi\|_1^a := \int_A \Psi_{-1}(0,x)\,d\,|\varphi|(x) < \infty,$$

де $|\varphi|$ — повна варіація φ.

Використовуватимемо ще такі простори: W_1^a — простір усіх вимірних за Лебегом функцій $\eta: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $\|\eta(\cdot)\hat{\Psi}_1(T,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}_+^n)}$; W_0^a — простір усіх неперервних функцій $\eta: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{C}$ таких, що $\hat{\Psi}_1(T,x)|\eta(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$

Основні результати

Однорідні функції Гріна $G_0^{(l)}$ задач (10)–(12) породжують оператори Пуассона $P_p^{(l)}$, $p \in [1,\infty]$, $l \in \{1,2\}$ за такими формулами:

$$\begin{aligned}(P_p^{(l)}\varphi)(t,x) &:= \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, (t,x) \in \Pi_T^+,\\ &\varphi \in \Phi_p^a,\ p \in (1,\infty];\\ (P_1^{(l)}\varphi)(t,x) &:= \int_{\mathbb{R}_+^n} G_0^{(l)}(t,x,\xi)\,d\varphi(\xi), (t,x) \in \Pi_T^+,\\ &\varphi \in \Phi_1^a.\end{aligned} \tag{18}$$

Основні результати статті містяться в наведених нижче теоремах.

Теорема 1. Нехай $\varphi \in \Phi_p^a$, де $p \in [1,\infty]$, $0 \le a \le c_0 / q(T)$. Тоді існує єдиний розв'язок u рівняння (10), який належить до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$, задовольняє крайову умову (11) у звичайному сенсі, а початкову умову (12) у такому сенсі:

при $1 < p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} = 0;$$

при $p = 1$

$$\forall \eta \in W_0^a : \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)\,d\varphi(x);$$

при $p = \infty$

$$\forall \eta \in W_1^a : \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \eta(x)d\varphi(x).$$

Крім того, правильне зображення

$$u = P_p^{(l)}\varphi \tag{19}$$

та оцінка $\sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^a$, де $C > 0$ — стала, яка від φ не залежить.

Теорема 2. Нехай u — розв'язок рівняння (10), який задовольняє крайову умову (11) та умову

$$\exists p \in [1,\infty]\ \exists a \in \in [0, c_0/q(T)) : \sup_{t\in(0,T]} \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} < \infty. \tag{20}$$

Тоді існує єдиний елемент $\varphi \in \Phi_p^a$ такий, що виконується початкова умова (12) у тому сенсі, який вказаний у теоремі 1, та u зображується у вигляді (19).

Доведення теорем 1 і 2 здійснюється за допомогою відповідної модифікації методики, розробленої в рамках реалізації підходу Е-І в [1–3, 7, 9]. Вони базуються на детальному вивченні властивостей інтегралів із (18), при якому використовуються оцінки (8), нерівності (17), рівність (9), відповідна формула Гріна–Остроградського та наведені вище означення норм і просторів.

З теорем 1 і 2 випливають такі важливі наслідки.

***Наслідок* 1**. Правильні такі твердження:

1) простір Φ_p^a із заданими p і a є множиною початкових значень розв'язків задачі (10)–(12) тоді й тільки тоді, коли ці розв'язки задовольняють умову (20) із цими значеннями p і a;

2) для зображення розв'язків задачі (10)–(12) у вигляді (19) з $\varphi \in \Phi_p^a$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (20) із заданими p і a;

3) розв'язки рівняння (10), для яких виконуються умови (11) і (20), задовольняють почат-

кову умову при $t = 0$ у сенсі, вказаному в теоремі 1.

***Наслідок* 2**. Нехай U_p^a – клас усіх розв'язків рівняння (10), які належать до простору $L_p^{k(\cdot,a)}$ та задовольняють умови (11) і (20). З теорем 1 і 2 та наслідку 1 випливає, що клас U_p^a є множиною значень оператора $P_p^{(l)}$, визначеного формулою (18), причому цей оператор установлює гомеоморфізм $\Phi_p^a \leftrightarrow U_p^a$.

Висновки

Наведені в статті результати, що стосуються характеризації розв'язків модельних крайових задач для параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами та описання множин початкових значень цих розв'язків, показують, у чому і як проявляється наявність у рівнянні членів зі зростаючими коефіцієнтами. Ці відомості дають змогу для загальніших крайових задач спрогнозувати подібні результати та намітити способи їх одержання.

Список літератури

1. *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, № 2. – С. 172–181.
2. *Івасишен С.Д., Кондур О.С.* Про інтегральне зображення розв'язків нормальних параболічних крайових задач // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 4. – С. 82–96.
3. *Кондур О.С.* Нормальні параболічні крайові задачі для систем з розривними коефіцієнтами // Доп. АН України. – 1994. – № 12. – С. 18–22
4. *Баруча-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
5. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. – 704 с.
6. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
7. *Заболотько Т.О., Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер. Математика. – 2012. – **2**, № 2-3. – С. 81–89.
8. *Турчина Н.І., Івасишен С.Д.* Вектор-функції Гріна крайових задач для модельного рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова нормального марковського процесу // Буковинський мат. журн. – 2014. – **2**, № 1. – С. 118–125.
9. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudodifferential Equations of Parabolic Type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).

References

1. S.D. Ivasyshen, "Solutions of parabolic equations in time-dependent families of Banach spaces", *Matematychni Studii*, vol. 40, no. 2, pp. 172–181, 2013 (in Ukrainian).
2. S.D. Ivasyshen and O.S. Kondur, "On integral representations of solutions for normal parabolic boundary problems", *Integralni Peretvorennia ta Ich Zastosuvannia do Kraiovych Zadach*, vol. 4, pp. 82–96, 1993 (in Ukrainian).
3. O.S. Kondur, "Normal parabolic boundary problems with discontinuous coefficients", *Dopovidi AN Ukr.*, no. 12, pp. 18–22, 1994 (in Ukrainian).
4. A.T. Barucha-Reid, *Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications.* Moscow, Russia: Nauka, 1996, 511 p. (in Russian).
5. V.I. Tikhonov and N.K. Kuhlman, *Nonlinear Filtering and Quasi-Coherent Reception of Signals.* Moscow, USSR: Sovetskoe Radio, 1975, 704 p. (in Russian).
6. V.I. Tikhonov and M.A. Mironov, *Markov Processes.* Moscow, USSR: Sovetskoe Radio, 1977, 488 p. (in Russian).
7. T.S. Zabolotko *et al.*, "The fundamental solution of the Cauchy problem for some parabolic equations with increasing coefficients and some of its applications", *Naukovy Visnyk Chernivetskogo Natsionalnogo Universytetu Fedkovycha*, *Ser. Matematyka*, vol. 2, № 2-3, pp. 81–89, 2012 (in Ukrainian).
8. N.I. Turchyna and S.D. Ivasyshen, "Green vector function of boundary value problems for the model of the Fokker-Plank-Kolmogorov normal Markov process", *Bukovynskyi Matematychnyi Zhurnal*, vol. 2, no. 1, pp. 118–125, 2014 (in Ukrainian).
9. S.D. Eidelman *et al.*, *Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Eqations of Parabolic Type Operator Theory* (Adv. And Appl. Vol. 152). Basel: Birkhäuser, 2004, 390 p.

С.Д. Івасишен, Н.І. Турчина

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФОККЕРА−ПЛАНКА−КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Проблематика. Відомий підхід Е-І С.Д. Ейдельмана та С.Д. Івасишена дав змогу для параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами повністю охарактеризувати широкі класи розв'язків, зокрема описати їх множини початкових значень, одержати інтегральне зображення та з'ясувати, в якому сенсі задовольняються початкові умови; якщо коефіцієнти рівнянь як функції x можуть необмежено зростати на нескінченності, то таких результатів майже немає.

Мета дослідження. Мета роботи – для однорідного модельного рівняння Фоккера−Планка−Колмогорова нормального марковського процесу, що містить зростаючі коефіцієнти, розглянути задачі Діріхле та Неймана у півпросторі, в яких крайові умови однорідні, а початкові дані належать до спеціальних вагових просторів Φ_p^a функцій чи узагальнених мір, а також реалізувати підхід Е-І для розв'язків таких задач.

Методика реалізації. Модифікація методики, використаної для рівнянь з обмеженими коефіцієнтами, яка ґрунтується на детальному вивченні властивостей операторів Пуассона, породжених функціями Гріна відповідних задач.

Результати дослідження. Установлено коректну розв'язність та інтегральне зображення за допомогою операторів Пуассона розв'язків таких задач у сімействах вагових L_p-просторів функцій, які при $|x| \to \infty$ мають експоненціальний ріст максимального порядку 2 із залежним від t типом. При цьому з'ясовується, в якому сенсі задовольняються початкові умови, а також характеризуються розглянуті класи розв'язків як множини значень операторів Пуассона, областями визначення яких є простори Φ_p^a.

Висновки. Результати статті показують, у чому і як проявляється наявність у рівнянні членів зі зростаючими коефіцієнтами; вони дають змогу для загальніших крайових задач спрогнозувати подібні результати та намітити способи їх одержання.

Ключові слова: рівняння Фоккера−Планка−Колмогорова нормального марковського процесу; задачі Діріхле та Неймана; функція Гріна; оператор Пуассона; коректна розв'язність; інтегральне зображення; вагові L_p-простори; характеризація розв'язків.

С.Д. Ивасишен, Н.И. Турчина

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА−ПЛАНКА−КОЛМОГОРОВА НОРМАЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Проблематика. Известный подход Е-І С.Д. Эйдельмана и С.Д. Ивасишена позволил для параболических уравнений с ограниченными коэффициентами полностью охарактеризовать широкие классы решений, в частности описать их множества начальных значений, получить интегральное изображения и выяснить, в каком смысле удовлетворяются начальные условия; если коэффициенты уравнений как функции x могут неограниченно расти на бесконечности, то таких результатов почти нет.

Цель исследования. Цель работы − для однородного модельного уравнения Фоккера−Планка−Колмогорова нормального марковского процесса, которое содержит растущие коэффициенты, рассмотреть задачи Дирихле и Неймана в полупространстве, в которых краевые условия однородны, а исходные данные относятся к специальным весовым пространствам Φ_p^a функций или обобщенных мер, а также реализовать подход Е-І для решения таких задач.

Методика реализации. Модификация методики, использованной для уравнений с ограниченными коэффициентами, которая основывается на детальном изучении свойств операторов Пуассона, порожденных функциями Грина соответствующих задач.

Результаты исследования. Установлены корректная разрешимость и интегральное изображение с помощью операторов Пуассона решений таких задач в семействах весовых L_p-пространств функций, которые при $|x| \to \infty$ имеют экспоненциальный рост максимального порядка 2 с зависимым от t типом. При этом выясняется, в каком смысле удовлетворяются начальные условия, а также характеризуются рассмотренные классы решений как множества значений операторов Пуассона, областями определения которых являются пространства Φ_p^a.

Выводы. Результаты статьи показывают, в чем и как проявляется наличие в уравнении членов с растущими коэффициентами; они позволяют для более общих краевых задач спрогнозировать подобные результаты и наметить способы их получения.

Ключевые слова: уравнение Фоккера−Планка−Колмогорова нормального марковского процесса; задачи Дирихле и Неймана; функция Грина; оператор Пуассона; корректная разрешимость; интегральное изображение; весовые L_p-пространства; характеризация решений.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
29 грудня 2014 року