УДК 519.21

О.В. Іванов, К.К. Москвичова
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

КОНСИСТЕНТІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

Background. For nonlinear regression model with continuous time and mean square continuous separable measurable Gaussian stationary random noise with zero mean and square-integrable spectral density the problem of statistical estimation of unknown covariance function of random noise in the presence of regression function nuisance parameter is considered.
Objective. To study asymptotic behavior of residual correlogram estimator of random noise covariance function using consistent least squares estimator of regression function unknown parameter.
Methods. To obtain the paper results we rely on the use of methodological machinery of monographs by V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko (2000), specifically, the theory of quadratically Gaussian random processes, and A.V. Ivanov and N.N. Leonenko (1989).
Results. Sufficient conditions of weak consistency in unknown metric of residual correlogram estimator are obtained. The rate of covariance to zero of the strong consistency in unknown metric of the estimator is formulated.
Conclusions. The results obtained given opportunity to continue research of asymptotic properties of Gaussian stationary random noise covariance function residual correlogram estimator in nonlinear regression model and to prove a functional theorem in the space of continuous function on asymptotic confidence intervals for unknown covariance function of random noise.
Keywords: nonlinear regression model; stationary Gaussian noise; covariance function; residual correlogram estimator; consistency; pseudometric; metric massiveness; metric entropy.

Вступ

Серед багатьох математичних моделей статистики випадкових процесів модель “сигнал плюс шум” є однією з найбільш широко використовуваних. Ця модель має практичне застосування в різних галузях природничих і соціальних наук, таких як геофізика, гідрологія, статистична радіофізика, метрологія, економетрика, фінанси, соціологія, біометрика тощо.

У роботі досліджується асимптотична поведінка залишкової корелограмної оцінки коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. Стохастичний асимптотичний розклад та асимптотичний розклад моментів цієї оцінки отримано в роботах [1, 2]. Питанню оцінювання коваріаційної функції присвячено велику кількість наукових праць. У нашому дослідженні ми спираємось на монографії [3, 4].

Залишки плідно і широко використовуються в статистичних процедурах лінійного та нелінійного регресійного аналізу, зокрема для оцінювання невідомої дисперсії випадкової похибки спостережень. Про важливість застосування екстремальних залишків у регресійних задачах зазначається в монографії [5]. В монографії [6] для моделі спостережень “константа плюс шум” розглянуто властивості найпростішої залишкової корелограмної оцінки коваріаційної функції однорідного випадкового поля.

Постановка задачі

У цій роботі вивчається властивість консистентності залишкової корелограмної оцінки. Метою дослідження є виведення достатніх умов, за яких ця оцінка коваріаційної функції випадкового шуму є слабко або сильно консистентною.

Вихідні положення

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \in [0,\infty),$$

де $g : [0,+\infty) \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}^1$ – неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ – обмежена відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|<1} (\Theta + \gamma a)$, $\gamma > 0$ – деяке число; $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, – випадковий шум, відносно якого припустимо:

I. $\varepsilon = \varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, – дійсний, неперервний у середньому квадратичному сепарабельний вимірний стаціонарний гауссов процес, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, з нульовим середнім та з інтегровною з квадратом спектральною щільністю $f = f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^1$.

Якщо виконано умову I, то коваріаційна функція $\mathrm{B} = \mathrm{B}(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, процесу ε також належить $L_2(\mathbb{R}^1)$, і за тотожністю Планшереля

$$\| \mathrm{B} \|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{B}^2(t)\,dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\,d\lambda = 2\pi \| f \|_2^2 .$$

Якщо коваріаційна функція невідома, то виникає задача статистичного оцінювання B за спостереженнями $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ за наявності заважаючого параметра θ.

Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ на інтервалі спостережень $[0,T]$ називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t), t \in [0,T]) = (\hat{\theta}_{1T}, \ldots \hat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ (Θ^c – замикання Θ), для якого

$$L_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau),\ L_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t,\tau)]^2\,dt.$$

Як оцінку B, прив'язану до оцінки $\hat{\theta}_T$, можна вибрати корелограму, побудовану за відхиленнями спостережень (залишками) $\hat{X}(t) = X(t) - g(t, \hat{\theta}_T)$, $t \in [0, T+H]$, а саме:

$$\mathrm{B}_T(z, \hat{\theta}_T) = T^{-1} \int_0^T \hat{X}(t+z)\,\hat{X}(t)\,dt,\ z \in [0,H],$$

$H > 0$ – фіксоване число.

Зауважимо, що $\mathrm{B}_T(0, \hat{\theta}_T) = T^{-1} L_T(\hat{\theta}_T)$ є оцінкою найменших квадратів дисперсії $\sigma^2 = \mathrm{B}(0)$ випадкового процесу ε, яка аналогічна усередненій залишковій сумі квадратів класичного регресійного аналізу, що використовується як оцінка невідомої дисперсії незалежних однаково розподілених похибок спостережень. З іншого боку,

$$\mathrm{B}_T(z,\theta) = \mathrm{B}_T(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z)\,\varepsilon(t)\,dt$$

є корелограмою процесу ε.

Основний результат

Нехай

$$\Phi_T(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T (g(t,\tau_1) - g(t,\tau_2))^2\,dt,$$

$$s_T^*(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t+z)\,dt,$$

$$u_T(z) = B_T(z) - B(z).$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

II. $\sup\limits_{\tau_1,\tau_2 \in \Theta^c} T^{-1} \Phi_T(\tau_1,\tau_2) \| \tau_1 - \tau_2 \|^{-2} \le C_1 < \infty.$

III. Оцінка найменших квадратів $\hat{\theta}_T$ консистентна в тому розумінні, що для будь-якого $\rho > 0$ і деякого цілого $m \ge 2$

$$P\{\| \hat{\theta}_T - \theta \| \ge \rho\} = O(T^{-\frac{m}{2}}),\ T \to \infty.$$

Достатні умови виконання III містяться в [3], [7].

Далі в тексті статті ми використовуємо поняття, означені в [4].

Введемо псевдометрики:

$$\rho(z_1, z_2) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{2}\,d\lambda \right)^{1/2},$$

$$\sqrt{\rho}(z_1, z_2) = \sqrt{\rho(z_1, z_2)},\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Нехай $N_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)$ і $H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = \ln N_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – метрична масивність і метрична ентропія множини $[0,1]$ відносно псевдометрики $\sqrt{\rho}$.

IV. $\int_{0+} H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty.$

Так само $N_{\sqrt{\rho}}$ і $H_{\sqrt{\rho}}$ будемо позначати метричну масивність і метричну ентропію множини $[0,H]$ відносно псевдометрики $\sqrt{\rho}$.

Теорема 1. Нехай виконані умови I–IV. Тоді для будь-якого $\rho > 0$

$$P\left\{ \sup_{z \in [0,H]} |\mathrm{B}_T(z, \hat{\theta}_T) - \mathrm{B}(z)| \ge \rho \right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}} \right). \quad (1)$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$\mathrm{B}_T(z, \hat{\theta}_T) - \mathrm{B}(z) =$$

$$= u_T(z) + T^{-1} I_{2T}(z) - T^{-1} I_{3T}(z) - T^{-1} I_{4T}(z),$$

де

$$I_{2T}(z) =$$

$$= \int_0^T (g(t+z, \hat{\theta}_T) - g(t+z, \theta))(g(t, \hat{\theta}_T) - g(t,\theta))\,dt,$$

$$I_{3T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t+z)(g(t,\hat{\theta}_T) - g(t,\theta))\,dt,$$

$$I_{4T}(z) = \int_0^T \varepsilon(t)(g(t+z,\hat{\theta}_T) - g(t+z,\theta))\,dt.$$

Очевидно, за умови II для достатньо великих T

$$\sup_{z\in[0,H]} T^{-1}|I_{2T}(z)| \le$$

$$\le \sqrt{2}((2T)^{-1}\Phi_{2T}(\hat{\theta}_T,\theta))^{1/2}(T^{-1}\Phi_T(\hat{\theta}_T,\theta))^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2}C_1\|\hat{\theta}_T - \theta\|^2,$$

а за умови III для довільного $\rho > 0$

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]} T^{-1}|I_{2T}(z)| \ge \rho\right\} \le$$

$$\le P\{\|\hat{\theta}_T - \theta\| \ge 2^{-1/4}(\rho/C_1)^{1/2}\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Використовуючи очевидну нерівність $s_T^*(z) \le 2s_{2T}^*(0)$, маємо далі

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]} T^{-1}|I_{3T}(z)| \ge \rho\right\} \le$$

$$\le P\{\sqrt{2}C_1^{1/2}(s_{2T}^*(0))^{1/2}\|\hat{\theta}_T - \theta\| \ge \rho,\ s_{2T}^*(0) \le$$

$$\le \sigma^2 + 1\} + P\{\sqrt{2}\,C_1^{1/2}(s_{2T}^*(0))^{1/2}\,\|\hat{\theta}_T - \theta\| \ge \rho,$$

$$s_{2T}^*(0) > \sigma^2 + 1\} = P_1 + P_2,$$

причому

$$P_1 \le P\{C_1^{1/2}(\sigma^2+1)^{1/2}\|\hat{\theta}_T - \theta\| \ge \rho\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Оцінимо P_2, застосовуючи до значення корелограми $B_{2T}(0) = s_{2T}^*(0)$ нерівність теореми 3.1, розділу 9.3 книги [4]:

$$P\{s_{2T}^*(0) - \sigma^2 > \sqrt{\mathbf{D}s_{2T}^*(0)}\,x\} \le K(x),$$

$$K(x) = (1+\sqrt{2}x)^{1/2}\exp\{-x/\sqrt{2}\},\ x > 0.$$

За формулою Ісерліса [4], при $T \to \infty$

$$\mathbf{D}s_{2T}^*(0) = T^{-1}\mathrm{b}_{2T}^2,$$

$$\mathrm{b}_{2T}^2 = (2T)^{-1}\int_0^{2T}\int_0^{2T} \mathrm{B}^2(t-s)\,dt\,ds \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \|\mathrm{B}^2\|_2^2 < \infty$$

за умови I. Візьмемо $x = (\mathbf{D}s_{2T}^*(0))^{-1/2} = T^{1/2}\mathrm{b}_{2T}^{-1}$, тоді для будь-якого $m > 0$ $P_2 \le P\{s_{2T}^*(0) > \sigma^2 + 1\} \le (1 + \sqrt{2}T^{1/2}\mathrm{b}_{2T}{}^{-1})^{1/2} \times \exp\{-T^{1/2}/(\sqrt{2}\mathrm{b}_{2T})\} = o\left(T^{-\frac{m}{2}}\right)$, тобто

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]} T^{-1}|I_{3T}(z)| \ge \rho\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Для величини $I_{4T}(z)$ отримуємо аналогічну оцінку, оскільки

$$\sup_{z\in[0,H]} T^{-1}|I_{4T}(z)| \le$$

$$\le (s_T^*(0))^{1/2}\sqrt{2}((2T)^{-1}\Phi_{2T}(\hat{\theta},\theta))^{1/2}.$$

Для доведення теореми 1 залишилось довести, що для довільних додатних чисел ρ і m

$$P\{\sup_{z\in[0,H]} |u_T(z)| \ge \rho\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Випадковий процес $Y_T(z) = T^{1/2}u_T(z)$, $z \in [0,H]$, є предгауссовим, отже, і $\mathrm{Exp}_{(1)}(\Omega)$-процесом. Нехай $\sigma_T = \{\sigma_T(z_1,z_2),\ z_1,z_2 \in [0,H]\}$ – псевдометрика середньоквадратичного відхилення, породжена процесом $Y_T(z)$, $z \in [0,H]$, тобто $\sigma_T(z_1,z_2) = (\mathrm{E}(Y_T(z_1) - Y_T(z_2))^2)^{1/2}$, $z_1,z_2 \in [0,H]$. Як показано в [4], для $z_1,z_2 \in [0,H]$

$$\rho_{Y_T}(z_1,z_2) = \|Y_T(z_1) - Y_T(z_2)\|_{E_{(1)}} \le$$

$$\le (C_r/\ln 2)^{1/2}\sigma_T(z_1,z_2),$$

$C_r = r^{-2}|\ln(1-r)| - r^{-1},\ r \in (0,1)$, – довільне фіксоване число, $\|\cdot\|_{E_{(1)}}$ – норма в просторі $\mathrm{Exp}_{(1)}(\Omega)$. Попередня нерівність є наслідком нерівності

$$\|Y_T(z)\|_{E_{(1)}} \le (C_r/\ln 2)^{1/2}(\mathrm{E}\,Y_T^2(z))^{1/2},\ z \in [0,H].$$

Маємо

$$\mathrm{E}\,Y_T^2(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T(\mathrm{B}^2(t-s) +$$

$$+\mathrm{B}(t-s+z)\mathrm{B}(t-s-z))\,dt\,ds \le 2\|\mathrm{B}\|_2^2\,.$$

Таким чином,

$$\sup_{z\in[0,H]} \|Y_T(z)\|_{E_{(1)}} \le (2C_r/\ln 2)^{1/2} \|\mathrm{B}\|_2 < \infty.$$

Звідси випливає, що

$$\varepsilon_{0T} = \sup_{z_1,z_2\in[0,H]} \rho_{Y_T}(z_1,z_2) \le 4(\pi C_r/\ln 2)^{1/2} \|f\|_2 .$$

За результатом леми 6.4.1 [4] для будь-яких $T>0$ і $z_1,z_2\ge 0$

$$\sigma_T^2(z_1,z_2) \le 8\pi\rho^2(z_1,z_2) + 8\pi\|f\|_2\,\rho(z_1,z_2) \le$$
$$\le 16\pi\|f\|_2\,\rho(z_1,z_2)$$

або

$$\sigma_T(z_1,z_2) \le 4\sqrt{\pi\|f\|_2}\sqrt{\rho}(z_1,z_2) \le$$
$$\le 4\sqrt{\pi}\|f\|_2,\ z_1,z_2\in[0,H].$$

Таким чином, маємо ланцюг нерівностей для псевдометрик:

$$\rho_{Y_T}(z_1,z_2) \le (C_r/\ln 2)^{1/2}\sigma_T(z_1,z_2) \le$$
$$\le 4(\pi C_r\|f\|_2/\ln 2)^{1/2}\sqrt{\rho}(z_1,z_2),\ T>0,$$
$$z_1,z_2\in[0,H],$$

і відповідний ланцюг для метричних масивностей інтервалу $[0,H]$:

$$N_{Y_T}(\varepsilon) \le N_T((C_r/\ln 2)^{-1/2}\varepsilon) \le N_{\sqrt{\rho}}(k\varepsilon),\ \varepsilon>0,$$

де $k = \frac{1}{4}(\pi C_r\|f\|_2/\ln 2)^{-1/2}$.

Нехай $\aleph(n), n\ge 1,$ – M-характеристика простору Орлича $\mathrm{Exp}_{(1)}(\Omega)$. Тоді за теоремою 3.3.1 [4]

$$\|\sup_{z\in[0,H]}|Y_T(z)|\|_{E_{(1)}} \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,H]}\|Y_T(z)\|_{E_{(1)}} + 4\int_0^{\varepsilon_{0T}}\aleph(N_{Y_T}(\varepsilon))d\varepsilon. \quad (2)$$

Із прикладу 2.3.2 [4] випливає, що

$$\aleph(n) = \begin{cases} n \text{ при } n\le e^2-1, \\ e^2\ln(1+n) \text{ при } n>e^2-1. \end{cases}$$

Запишемо

$$\int_0^{\varepsilon_{0T}}\aleph(N_{Y_T}(\varepsilon))d\varepsilon = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{[0,\varepsilon_{0T}]\cap\{\varepsilon:N_{Y_T}(\varepsilon)\le e^2-1\}} N_{Y_T}(\varepsilon)d\varepsilon \le \varepsilon_{0T}(e^2-1) \le$$
$$\le 4(\pi C_r/\ln 2)^{1/2}\|f\|_2(e^2-1). \quad (3)$$

З іншого боку,

$$I_2 = e^2\int_{[0,\varepsilon_{0T}]\cap\{\varepsilon:N_{Y_T}(\varepsilon)>e^2-1\}} \ln(1+N_{Y_T}(\varepsilon))d\varepsilon \le$$
$$\le e^2\int_{[0,\varepsilon_{0T}]\cap\{\varepsilon:N_{\sqrt{\rho}}(k\varepsilon)\ge e^2-1\}} \ln(1+N_{\sqrt{\rho}}(k\varepsilon))d\varepsilon \le$$
$$\le e^2\int_0^{\bar\varepsilon}\ln(1+N_{\sqrt{\rho}}(k\varepsilon))d\varepsilon =$$
$$= e^2k^{-1}\int_0^{\varepsilon_0}\ln(1+N_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon))d\varepsilon, \quad (4)$$

де $\bar\varepsilon = \varepsilon_0/k$, $\varepsilon_0 = \sup_{z_1,z_2\in[0,H]}\sqrt{\rho}(z_1,z_2) \le \|f\|_2^{1/2}$.

Очевидно,

$$\ln(1+N_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)) \le H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) + \ln 2,\ \varepsilon>0, \quad (5)$$

і тому, збираючи оцінки (3)–(5), отримуємо з (2):

$$\|\sup_{z\in[0,H]}|Y_T(z)|\|_{E_{(1)}} \le$$
$$\le 2(\pi C_r/\ln 2)^{1/2}\|f\|_2(2e^2(1+\ln 2)-1) +$$
$$+ 4e^2(\pi C_r/\ln 2)^{1/2}\|f\|_2^{1/2}\int_0^{\varepsilon_0}H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon)d\varepsilon = D_1 < \infty$$

завдяки умові IV, але нагадуємо, в останньому інтегралі $H_{\sqrt{\rho}}(\varepsilon) = H_{\sqrt{\rho}}([0,H],\varepsilon)$.

Застосуємо теорему 3.3.4 [4] до $\mathrm{Exp}_{(1)}(\Omega)$-процесу $Y_T(z), z\in[0,H]$, яка в нашій модифікації стверджує, що для будь-якого $x>0$

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]}|Y_T(z)|\ge x\right\} \le 2\exp\{-x/D_1\}. \quad (6)$$

Звичайно, константа D_1 значно грубіша за відповідну константу теореми 3.3.4, а також константу A_T теореми 6.3.2 [4], але D_1 не залежить від T. Візьмемо в (6) $x = T^{1/2}\rho$, де $\rho>0$ – будь-яке число, і отримаємо нерівність

$$P\left\{\sup_{z\in[0,H]}|\mathrm{B}_T(z)-\mathrm{B}(z)|\ge\rho\right\} \le$$

$$\leq 2\exp\{-\rho T^{1/2}/D_1\} \leq o\left(T^{-\frac{m}{2}}\right)$$

для будь-якого $m > 0$.

Достатньою для виконання умови IV є така умова [4]:

IV$_1$. Існує така $\delta > 0$, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\ln^{4+\delta}(1+\lambda)d\lambda < \infty.$$

Своєю чергою, якщо $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$, то IV$_1$ виконується при деяких додаткових вимогах до спектральної щільності f [4].

Наслідок **1.** За умов I–III і IV$_1$ справедливе (1).

Крім цього, із доведення теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок **2.** За умов I–III для будь-яких $z \in [0, H]$ і $\rho > 0$

$$P\{|\mathrm{B}_T(z, \hat{\theta}_T) - \mathrm{B}(z)| \geq \rho\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Використання теореми 4.2.3 [3] дає змогу сформулювати таке твердження.

Теорема 2. Нехай виконано умови I, II,

III$_1$. $\hat{\theta}_T \to \theta$, $T \to \infty$, майже напевно,

IV$_2$. $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{\delta} f^2(\lambda)d\lambda < \infty$ для деякого $\delta > 0$.

Тоді

$$\sup_{z\in[0,H]} |\mathrm{B}_T(z, \hat{\theta}_T) - \mathrm{B}(z)| \to 0,\ T \to \infty,$$

майже напевно.

Достатні умови виконання III$_1$ містяться в [3, 6].

Висновки

Залишкова корелограмна оцінка, крім випадку, коли функція регресії є константою (математичним сподіванням стаціонарного процесу, що спостерігається) до робіт авторів [1, 2] не розглядалась. Запропонована методика доведення консистентності загальної залишкової корелограмної оцінки є новою і раніше не розглядалась.

Використовуючи цю методику, можна отримати важливі у застосуваннях подальші асимптотичні властивості розглянутої оцінки, а саме: довести функціональну теорему в просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність цієї оцінки та побудувати асимптотичний надійний інтервал в рівномірній метриці для невідомої коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом.

Список літератури

1. *Іванов О.В., Москвичова К.К.* Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2014. – Вип. 90. – С. 78–91.
2. *Іванов О.В., Москвичова К.К.* Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // Укр. мат. журнал. – 2014. – **66**, № 6. – С. 787–805.
3. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Statistical Analysis of Random Fields. – Dordecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1989. – 244 p.
4. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes (Transl. of Math. Monographs). – Am. Math. Soc., 2000. – 257 p.
5. *Мацак І.К.* Елементи теорії екстремальних значень. – К.: ЦП "Компринт", 2014. – 210 с.
6. *Leonenko N.N.* Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 401 p.
7. *Ivanov A.V.* Asymtotic Theory of Nonlinear Regression. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 327 p.

References

1. O.V. Ivanov and K.K. Moskvychova, "Stochastic asymptotic expansion of random noise covariance function correlogram estimator in nonlinear regression model", *Teoria Imovirnostey i Matematychna Statystyka*, no. 90, pp. 78–91, 2014 (in Ukrainian).
2. O.V. Ivanov and K.K. Moskvychova, "Asymptotic expansion of the moments of random noise covariance function correlogram estimator in nonlinear regression model", *Ukrainsky Matematychny Zhurnal*, vol. 66, no. 6, pp. 787–805, 2014 (in Ukrainian).

3. A.V. Ivanov and N.N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields.* Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989, 244 p.
4. V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes* (Transl. of Math. Monographs). Am. Math. Soc., 2000, 257 p.
5. I.K. Matsak, *Elements of the Theory of Extreme Values.* Kyiv, Ukraine: Comprint, 2014, 210 p. (in Ukrainian).
6. N.N. Leonenko, *Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum.* Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999, 401 p.
7. A.V. Ivanov*, Asymtotic Theory of Nonlinear Regression.* Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 327 p.

О.В. Іванов, К.К. Москвичова

КОНСИСТЕНТІСТЬ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

Проблематика. Для нелінійної моделі регресії з неперервним часом і неперервним у середньому квадратичному сепарабельним вимірним гауссовим стаціонарним випадковим шумом з нульовим середнім та інтегрованою з квадратом спектральною щільністю розглянуто задачу статистичного оцінювання невідомої коваріаційної функції випадкового шуму за наявності заважаючого параметра функції регресії.

Мета дослідження. Вивчити асимптотичну поведінку залишкової корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму з використанням консистентної оцінки найменших квадратів невідомого параметра функції регресії.

Методика реалізації. Отримання результатів роботи ґрунтується на застосуванні методологічного апарату монографій В.В. Булдигіна, Ю.В. Козаченка (2000), зокрема теорії квадратично гауссових випадкових процесів, та О.В. Іванова, М.М. Леоненка (1989).

Результати дослідження. Отримано достатні умови, за яких залишкова корелограмна оцінка є слабко консистентною в рівномірній матриці. Вказано швидкість, з якою відповідна ймовірність прямує до нуля. Сформульовано також теорему про сильну консистентність вказаної оцінки в рівномірній матриці.

Висновки. Отримані результати надають можливість продовжити вивчення асимптотичних властивостей залишкової корелограмної оцінки коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії і довести функціональну теорему в просторі неперервних функцій про асимптотичну нормальність цієї оцінки, яка дасть змогу будувати асимптотичні надійні інтервали для невідомої коваріаційної функції випадкового шуму.

Ключові слова: нелінійна модель регресії; стаціонарний гауссів шум; коваріаційна функція; залишкова корелограмна оцінка; консистентність; псевдометрика; метрична масивність; метрична ентропія.

А.В. Иванов, Е.К. Москвичёва

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ КОРРЕЛОГРАМНОЙ ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОГО ШУМА В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ

Проблематика. Для нелинейной модели регрессии с непрерывным временем и непрерывным в среднем квадратичном сепарабельным измеримым гауссовским стационарным случайным шумом с нулевым средним и интегрируемой с квадратом спектральной плотностью рассмотрена задача статистического оценивания неизвестной ковариационной функции случайного шума в присутствии мешающего параметра функции регрессии.

Цель исследования. Изучить асимптотическое поведение остаточной коррелограммной оценки ковариационной функции случайного шума с использованием состоятельной оценки наименьших квадратов неизвестного параметра функции регрессии.

Методика реализации. Получение результатов работы опирается на использование методологического аппарата монографий В.В. Булдыгина, Ю.В. Козаченко (2000), в частности теории квадратично гауссовских случайных процессов, и А.В. Иванова, Н.Н. Леоненко (1989).

Результаты исследования. Получены достаточные условия, при которых остаточная коррелограмная оценка является слабо состоятельной в равномерной метрике. Указана скорость, с которой соответствующая вероятность стремится к нулю. Также сформулирована теорема о сильной состоятельности указанной оценки в равномерной метрике.

Выводы. Полученные результаты дают возможность продолжить изучение асимптотических свойств остаточной коррелограммной оценки ковариационной функции гауссовского стационарного случайного шума в нелинейной модели регрессии и доказать функциональную теорему в пространстве непрерывных функций об асимптотической нормальности этой оценки, которая позволит строить асимптотические доверительные интервалы для неизвестной ковариационной функции случайного шума.

Ключевые слова: нелинейная модель регрессии; стационарный гауссовский шум; ковариационная функция; остаточная коррелограмная оценка; состоятельность; псевдометрика; метрическая массивность; метрическая энтропия.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції 29 серпня 2014 року