УДК 517.9

Т.І. Вдовенко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ХВИЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Background. We consider nonselfadjoint singular rank one perturbation of a self-adjoint operator by nonsymmetric potential, i.e. expression of the form

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\delta_1\rangle\,\delta_2,$$

where A is a selfadjoint semi-bounded operator in the separable Hilbert space $\mathcal{H}$. Our investigations consist in the fact that it is unknown whether $\tilde{A}$ is a spectral operator for vectors $\delta_1,\delta_2 \in \mathcal{H}_{-1}$, $\delta_1 \neq \delta_2$.

Objective. Purpose of the study is to establish the existence of wave operators in $\tilde{A}$ provided “weak-weak” singular perturbation rank “one-one”

$$\dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D}) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D}) = 1,\ \dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D}_*) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D}_*) = 1,$$

where subsets

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}(\tilde{A})\,|\,Af = \tilde{A}f\},\quad \mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}(\tilde{A}^*)\,|\,Af = \tilde{A}^*f\}$$

dense both in $\mathcal{H}$.

Methods. Known T. Kato theorem is used to the operator $\tilde{A}$.

Results. Using the explicit description of $\tilde{A}$ we prove the existence of wave operators with $|\alpha| < \infty$ corresponding $\tilde{A}$. Wave operators are defined by equality

$$(\tilde{W}_{\pm}u, v) = (u, v) \mp \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle R_{\lambda\pm i0}u,\omega_1\rangle\langle\omega_2,\tilde{R}^*_{\lambda\mp i0}v\rangle\,d\lambda,\quad u, v \in \mathcal{H},$$

where $\tilde{R}$ and R are resolvents of perturbed and unperturbed operators.

Conclusions. The existence of wave operators is provided and their form of action is given for singular perturbation of rank one nonsymmetric potential.

Keywords: singular perturbation; eigenvalue problem; Krein’s formula; nonselfadjoint perturbation; wave operators.

Вступ

Розглядається формальний вираз вигляду [1, 2]

$$-\tilde{\Delta} := -\Delta + \alpha\langle\cdot,\delta(x-x_0)\rangle\,\delta(x-x_0), \tag{1}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}\cup\infty$, $\delta(x-x_0) \in \mathcal{H}_{-2} := W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ — негативний соболівський простір, відповідний $W_2^2(\mathbb{R}^1)$, і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — дуальний для $W_2^2(\mathbb{R}^1)$ і $W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ скалярний добуток. Визначений в (1) оператор $-\Delta$ діє таким чином:

$$-\tilde{\Delta}f = -f'' + \alpha f(x_0)\delta(x-x_0) \tag{2}$$

на векторах $f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Delta}) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R})\cap W_2^2(\mathbb{R}\setminus\{x_0\})\,|$ $|\,f'(x_0+) - f'(x_0-) = \alpha f(x_0)\}$ [1, 2].

У цій статті продовжується розгляд узагальнення (1), (2) вигляду

$$-\tilde{\Delta}f = -\Delta f + \alpha f(x_1)\delta(x-x_2),\quad x_1 \neq x_2,\quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{D}(\tilde{\Delta}) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1\setminus\{x_1\})\,|\,f(x_1+) = f(x_1-), f'(x_2+) - f'(x_2-) = \alpha f(x_1)\}.$$

При $x_1 = x_2$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ ми отримуємо звичайний випадок (1).

У термінах абстрактних просторів і операторів (1), (2) має вигляд:

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2,\quad \omega_1,\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}, \tag{4}$$

де $A = A^*$ самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{-1}$ — простір з A-шкали просторів і константа зв’язку $\alpha \in \mathbb{C}\cup\infty$.

Спектральні властивості оператора $-\tilde{\Delta}$ у (3) (також $\tilde{A}$ в (4)) відрізняються від $-\tilde{\Delta}$ у (2), оскільки $\tilde{A}$ в (4) — несамоспряжений оператор. Але багато стандартних фактів теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів [2, 3] мають аналоги для виразів (3) і (4).

Якщо в (4) маємо $\omega_1 = \omega_2$ і $\alpha \in \mathbb{R} \bigcup \infty$, то приходимо до звичайної теорії самоспряжених сингулярних збурень [2–4]. Отже, розглядаючи вирази вигляду (4), отримуємо деяке природне узагальнення теорії сингулярних збурень.

Ідеї роботи найближчі до нелокальних спектральних задач [5–7] для випадку самоспряжених операторів.

Постановка задачі

Завданням роботи є дослідження умов існування хвильових операторів у сингулярних збуреннях вигляду (4).

Для реалізації цього завдання використовуються математичні методи з [8–10]. При розгляді завдання виникає питання про інваріантність абсолютно неперервної частини спектра оператора при несиметричних збуреннях вигляду (4).

Попередні відомості

Нехай $A = A^*$ – самоспряжений необмежений оператор, визначений на $\mathrm{Dom}\, A = \mathfrak{D}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо $\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ спектр, точковий спектр, неперервний спектр і регулярні точки відповідного заданого оператора.

***Означення* 1.** Лінійний замкнений оператор $\tilde{A} \neq A$, щільно визначений у $\mathcal{H}$, називається сингулярно-сингулярно збуреним ((*s,s*)-збуренням) A, якщо обидві множини

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \bigcap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \bigcap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^* f\} \tag{6}$$

щільні в $\mathcal{H}$. Позначимо $\tilde{A} \in P_{s,s}(A)$.

Зрозуміло, що для кожного оператора $\tilde{A} \in P_{s,s}(A)$ існує пара щільно визначених симетричних обмежених операторів $\dot{A} := A \upharpoonright \mathfrak{D}$ та $\dot{A}_* := A \upharpoonright \mathfrak{D}_*$ з нетривіальними індексами дефекту $n^{\pm}(\dot{A}) = \dim \ker(\dot{\mathrm{A}} \mp \mathrm{z})^* \neq 0$ і $n^{\pm}(\dot{A}_*) = \dim \ker(\dot{\mathrm{A}}_* \mp \mathrm{z})^* \neq 0$, $z \in \rho(A)$. У цій статті припускаємо, що $n^{\pm}(\dot{A}) = n^{\pm}(\dot{A}_*) = 1$, тобто розглядається випадок $\tilde{A} \in P_{s,s}^{1,1}(A)$.

Якщо $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_*$ та $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, тоді отримуємо випадок означення сингулярно збурених самоспряжених операторів [2, 3] $\tilde{A} \in P_s(A)$.

Нехай $\{\mathcal{H}_k(A)\}_{k \in \mathbb{R}^1}$ – асоційована A-шкала гільбертових просторів [2], де простір $\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}|A|^{k/2}$, $k \geq 1$, з нормою $\|\varphi\|_k = \|(|A| + I)^{k/2}\varphi\|$ (I – одиничний оператор), $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ – від'ємний (дуальний) простір, тобто доповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|$, $f \in \mathcal{H}$. Нехай $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позначає дуальний скалярний добуток між просторами $\mathcal{H}_k$ та $\mathcal{H}_{-k}$. У подальшому використовується тільки $k = 1, 2$.

Оператор A продовжується за неперервністю на $\mathcal{H}_{+1}$ і є обмеженим оператором з $\mathcal{H}_{+1}$ на весь $\mathcal{H}_{-1}$. (Аналогічно, якщо A продовжується на $\mathcal{H}$, то він є обмеженим оператором з $\mathcal{H}$ на весь $\mathcal{H}_{-2}$.) Позначимо це продовження $\mathbf{A}$. Таким чином, вираз $\langle \varphi, \omega \rangle$ для $\omega = \mathbf{A}\psi$ має значення для векторів $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1}$. І операторнозначна функція $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z)^{-1}$, $z \in \rho(A)$, є відповідною резольвентою.

Оскільки вектори ω_1, ω_2 у (4) можуть належати $\mathcal{H}_{-k} \backslash \mathcal{H}_{-(k-1)}$, $k = 0, 1, 2$, то ми розрізняємо випадки (зокрема, регулярного) збурення. З цією метою позначимо $P_{x,y}(A)$, де кожен індекс – пара $\{x, y\}$ – може мати один із символів "*ss*, *ws*, *r*", що означає "строго сингулярний", або "слабо сингулярний", або "регулярний" вектор збурення. Після описового надамо строге означення.

***Означення* 2.** Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (5) і (6) маємо

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}) = 1 \ \ (= n \neq 0),$$

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1 \ \ (= m \neq 0),$$

то збурення називається "слабо-слабо" сингулярним, тобто (*ws,ws*)-сингулярним рангу один-один (тобто (1,1)), і позначається $\tilde{A} \in P_{ws,ws}^{1,1}(A)$ і для рангу $(n,m) : (\tilde{A} \in P_{ws,ws}^{n,m}(A))$.

Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (5) і (6) маємо

$$\dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}) = 0\,,\ \dim(\mathcal{H}_{+2} \ominus \mathfrak{D}) = 1\ \ (= n \neq 0)\,,$$

$$\dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}_*) = 0\,,\ \dim(\mathcal{H}_{+2} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1$$

$$(= m \neq 0)\,,$$

то збурення називається “сильно-сильно” сингулярним, тобто (*ss*,*ss*)-сингулярним рангу один-один (тобто (1,1)), і позначається $\tilde{A} \in P^{1,1}_{s,s}(A)$ і для рангу $(n,m) : (\tilde{A} \in P^{n,m}_{s,s}(A))$.

Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (5) і (6) маємо

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = 1\,,\ (= n \neq 0)\,,$$

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1\,,\ (= m \neq 0)\,,$$

то збурення називається “регулярним-регулярним”, тобто (*r*,*r*)-збуренням рангу один-один (тобто (1,1)), і позначається $\tilde{A} \in P^{1,1}_{r,r}(A)$ і для рангу $(n,m) : (\tilde{A} \in P^{n,m}_{r,r}(A))$.

Збурення мішаного типу (*ss*,*ws*), (*ss*,*r*), (*ws*,*r*), тобто $P_{ss,ws}(A)$, $P_{ss,r}(A)$ і $P_{ws,r}(A)$, та випадки $n > 1$, $m > 1$ у цій публікації не розглядаються.

Ми розглядаємо лише випадок “слабо-слабо” сингулярного збурення рангу один-один, а саме досліджуємо наявність хвильових операторів для $\tilde{A} \in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$. Інші види збурень ми розглянемо в подальших публікаціях, оскільки інші випадки вимагають більш досконалих технічних методів.

Розглянемо в *A*-шкалі оператор V такий, що $\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+1}$ і $\mathfrak{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-1}$. У нашому випадку $V = \alpha\langle \cdot, \omega_1\rangle \omega_2$ (згідно з (4)). Визначимо оператор $A \tilde{+} V$ як узагальнену суму [11]:

$$(A \tilde{+} V)\varphi := (\mathbf{A}\varphi + V\varphi)\,,$$

$$\varphi \in \mathfrak{D}(A \tilde{+} V) := \{\varphi \in \mathfrak{D}(V) \,|\, \mathbf{A}\varphi + V\varphi \in \mathcal{H}\}\,,$$

тобто $\tilde{A} f = (\mathbf{A} f + \alpha\langle f, \omega_1\rangle \omega_2) \upharpoonright \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}_{+1}$. Не втрачаючи загальності, у подальшому тексті ми пишемо A замість $\mathbf{A}$ та R_z замість $\mathbf{R}_z$.

Зауважимо, що якщо $\tilde{A} \in P_{ws,ws}(A)$, то також $\tilde{A}^* \in P_{ws,ws}(A)$. У [8] доведено, що кожний оператор $\tilde{A} \in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$ (означення 1 і 2) має вигляд

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle \cdot, \omega_1\rangle \omega_2\,,\ \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}\,,$$

$$\alpha \in \mathbb{C} \cup \infty\,. \qquad (7)$$

Теорема з [8] описує також сингулярні несиметричні збурення рангу один у вигляді резольвент відповідного оператора. Тобто в [8] доведено, що для резольвент $R_z = (A - z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$ операторів $A = A^*$ та $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ можна записати формулу М. Крейна для $z, \xi, \zeta \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}}) m_z \qquad (8)$$

з дефектними векторами

$$n_z = (A - \xi)(A - z)^{-1} n_\xi\,,$$
$$m_z = (A - \zeta)(A - z)^{-1} m_\zeta\,, \qquad (9)$$

де $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ і

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}})\,. \qquad (10)$$

Вектори n_z, m_z і число b_z пов’язані з ω_1, ω_2 із (7) виразами

$$n_z = R_z \omega_1\,,\ m_z = R_z \omega_2\,,\ -b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle \omega_2, R_{\bar{z}}\, \omega_1\rangle\,,$$

де $\alpha \neq 0$.

Якщо $\alpha = 0$, то вважаємо, що $b_z \equiv 0$ і, отже, $\tilde{R}_z \equiv R_z$.

Неперервний спектр $\sigma_c(A)$ оператора A при збуренні скінченного рангу незмінний, тобто $\sigma_c(A) = \sigma_c(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in P^{n,n}_{s,s}(A)$, $n < \infty$. Але точковий спектр може відрізнятися. Тобто, якщо (ws,ws)-збурення $\tilde{A} \in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$ задане у вигляді (8) з (9) і (10) набуває нового власного значення $\lambda \in \mathbb{C}$ порівняно з A, тобто існує $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A})$, $\lambda \notin \sigma_p(A)$, то для відповідних власних векторів $\varphi, \psi : \tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ і $\tilde{A}^*\psi = \bar{\lambda}\psi$ виконуються співвідношення

$$(\lambda - z) b_z(\varphi, n_{\bar{z}}) = 1,\ \varphi = (A - z)(A - \lambda)^{-1} m_z; \quad (11)$$

$$(\bar{\lambda}-\bar{z})\bar{b}_z(\psi, m_z)=1\,,\ \psi=(A-\bar{z})(A-\bar{\lambda})^{-1}n_{\bar{z}}\,. \quad (12)$$

Доведення цього факту у випадку самоспряжених збурень є в [12] і у випадку несамоспряженого збурення ідейно не відрізняється від самоспряженого.

У термінах (7) цей факт має такий вигляд.

Нехай (*ws,ws*)-збурення $\tilde{A}\in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$ набуває нового власного значення $\lambda\in\mathbb{C}$ порівняно з A і власні вектори φ і ψ, тобто $\tilde{A}\varphi=\lambda\varphi$ і $\tilde{A}^*\psi=\bar{\lambda}\psi$, тоді співвідношення (11) і (12) у термінах ω_1,ω_2 мають вигляд

$$\alpha\langle (A-\lambda)^{-1}\omega_2,\omega_1\rangle=-1\,,\ \varphi=(A-\lambda)^{-1}\omega_2\,; \quad (13)$$

$$\bar{\alpha}\langle (A-\bar{\lambda})^{-1}\omega_1,\omega_2\rangle=-1\,,\ \psi=(A-\bar{\lambda})^{-1}\omega_1\,. \quad (14)$$

Хвильові оператори сингулярних несиметричних збурень рангу один

Наведемо більш загальні міркування, запозичені з [10].

Нехай A – замкнений лінійний (взагалі, не самоспряжений) щільно визначений у $\mathcal{H}$ оператор зі спектром на дійсній вісі. Нехай T – замкнений лінійний (також, узагалі, несамоспряжений) щільно визначений оператор з $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$ такий, що $\mathfrak{D}(T)\supset\mathfrak{D}(A)$.

Оператор T називається A-гладким, якщо існує константа M_u, залежна від вектора u і незалежна від ε, така що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|TR_{\lambda\pm i\varepsilon}u\|^2 d\lambda\le M_u^2\,,\ \varepsilon>0\,. \quad (15)$$

Мінімальне M позначається через $\|T\|_A$.

З [10] ми формулюємо такий результат пристосований до наших позначень.

Теорема 1. Нехай A – замкнений лінійний (взагалі, не самоспряжений) щільно визначений у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ оператор зі спектром на дійсній вісі та резольвентою R_z, $\operatorname{Im} z\ne 0$.

Нехай оператори K і B – замкнені лінійні щільно визначені оператори з $\mathcal{H}$ в інший сепарабельний гільбертів простір $\mathcal{H}'$.

Припустимо, що K є A-гладким, а B є A^*-гладким. Припустимо також, що існує константа $k<\infty$, така що

$$\|KR_zB^*u'\|\le k\,\|u'\|\,,\ u'\in\mathfrak{D}(B^*)\subset\mathcal{H}'\,. \quad (16)$$

Тоді для всіх комплексних чисел α, таких що $|\alpha|<1/k$, оператор $\tilde{A}\equiv A_\alpha=A+\alpha B^*K$ задовольняє властивості:

1) K є A_α-гладкий і B є A^*_α-гладкий із оцінками

$$\|K\|_{\tilde{A}}\le(1-k|\alpha|)^{-1}\|K\|_A\,,$$

$$\|B\|_{\tilde{A}^*}\le(1-k|\alpha|)^{-1}\|B\|_{A^*}\,;$$

2) резольвента $\tilde{R}_z=(\tilde{A}-z)^{-1}$ задовольняє тотожність

$$\tilde{R}_z-R_z=-\alpha[R_zB^*]K\tilde{R}_z=-\alpha[\tilde{R}_zB^*]KR_z\,, \quad (17)$$

де квадратні дужки означають замикання відповідного оператора з $\mathcal{H}'$ у $\mathcal{H}$;

3) $\tilde{R}_z$, $K\tilde{R}_z$ і $B\tilde{R}_z$ – голоморфні по z і по α;

4) $\tilde{A}\supset A+\alpha B^*K$, $\tilde{A}^*\supset A^*+\bar{\alpha}K^*B$, $A\supset\supset\tilde{A}-\alpha B^*K$, $A^*\supset\tilde{A}^*-\bar{\alpha}K^*B$;

5) A і $\tilde{A}$ є подібними в тому розумінні, що

$$(\tilde{W}_\pm u,v)=(u,v)\mp\frac{\alpha}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}(R_{\lambda\pm i0}u,\tilde{R}^*_{\lambda\mp i0}v)\,d\lambda,$$

$$u,v\in\mathcal{H}, \quad (18)$$

визначає “хвильові оператори”, які, разом зі своїми зворотними, є обмеженими в $\mathcal{H}$ і, отже, A- і $\tilde{A}$-подібними:

$$\tilde{A}=\tilde{W}_\pm A\tilde{W}_\pm^{-1}\,.$$

Теорема 2. Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений напівобмежений (додатний) оператор A.

Тоді сингулярно збурений рангу один несиметричним потенціалом оператор $\tilde{A}\in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$ у розумінні означень 1 і 2 та початковий оператор A подібні:

$$\tilde{A}=\tilde{W}_\pm A\tilde{W}_\pm^{-1}\,,$$

де $\tilde{W}_\pm$ – хвильові оператори, для яких виконується рівність

$$(\tilde{W}_\pm u,v)=$$

$$= (u,v) \mp \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle R_{\lambda \pm i0} u, \omega_1 \rangle \langle \omega_2, \tilde{R}^*_{\lambda \mp i0} v \rangle d\lambda,$$

$$u, v \in \mathcal{H}, \qquad (19)$$

Доведення істотно використовує теорему 1. Оператор A є самоспряженим і напівобмеженим, отже, задовольняє умови теореми 1. Збурений оператор $\tilde{A} \in P^{1,1}_{ws,ws}(A)$ має вигляд (7). Порівнюючи $\tilde{A}$, заданий (7), із $\tilde{A} \equiv A_\alpha = A + \alpha B^* K$, покладаємо $K = (\cdot, \omega_1)\omega_1$ і $B^*\omega_1 = \omega_2$ (на інших векторах B^* можна вважати одиничним). Тут $\mathcal{H}$ – основний простір, $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_-$. Очевидно, і K, і B задовольняють нерівність (15) у тому розумінні, що інтеграл у (15) збігається, тобто вони є A-гладкими.

Розглянемо нерівність (16). Покладемо $u' = Kf = \langle f, \omega_1 \rangle \omega_1$. Тоді $B^* K f = \langle f, \omega_1 \rangle \omega_2$. Отже, права частина нерівності (16) має вигляд

$$\| K(f, \omega_1) R_z \omega_2 \| = |(f, \omega_1)| \, |(R_z \omega_2, \omega_1)| \, \|\omega_1\| .$$

Для лівої частини нерівності (16) маємо

$$\| u' \| = \| Vf \| = |(f, \omega_1)| \, \| \omega_1 \| .$$

Після скорочення нерівність (16) має вигляд $|(R_z \omega_2, \omega_1)| < k$.

Відомо, що

$$|(R_z \omega_2, \omega_1)| \le \frac{1}{dist(z, \sigma(A))} := k .$$

З (13) $|(R_z \omega_2, \omega_1)| = -\frac{1}{\alpha}$. Отже, оцінка $|\alpha| < 1/k$ виконується. Зокрема, додамо, що рівність досягається при $z = \lambda$.

Вираз для хвильових операторів (19) отримуємо із підстановки $KB^* \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ у (18).

Між іншим зауважимо, що формула для резольвент (17) виконується у нашому випадку незалежно і має вигляд (8). Отже, теорема доведена.

Висновки

З використанням визначення сингулярно збуреного рангу один самоспряженого оператора при збуренні несиметричним потенціалом доведено існування хвильових операторів для збуреного оператора. Збурений оператор визначений у формі резольвент та узагальненої суми. Наведено спосіб дії (у слабкому сенсі) хвильових операторів.

Одночасно було з'ясовано, що сингулярно збурений рангу один несиметричним потенціалом оператор є спектрального типу, скалярного типу, а також те, що несиметричне збурення не змінює абсолютно неперервний спектр оператора.

У подальших публікаціях буде можливим записати матрицю розсіяння, використовуючи уведені хвильові оператори. Загальна описана ситуація може бути реалізована на моделях збуреного оператора Лапласа потенціалами, які мають характер локальної взаємодії (типу δ-функцій). Також наведений опис буде застосований для роз'язку диференціальних задачах Штурма–Ліувілля із лінійно перетвореним аргументом.

Список літератури

1. *Solvable* models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden; with an appendix by Pavel Exner. – 2nd ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.
2. *Singular* perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov // London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 271. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 444 p.
3. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory // Mathematics and its Applications. – 1999. – **474**.
4. *Berezansky Y., Brasche J.* Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, № 3. – P. 54–66.
5. *Albeverio S., Hryniv R., Nizhnik L.* Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators // Inverse Problems. – 2007. – **23**. – P. 523–535.
6. *Nizhnik L.* Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem // Inverse Problems. – 2010. – **26**. – P. 523–535.
7. *Nizhnik L.* Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation // Tamkang J. Math. – 2011. – **42**, № 3. – P. 385–394.
8. *Вдовенко Т.І., Дудкін М.Є.* Строго сингулярні збурення рангу один несиметричним потенціалом // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 4. – С. 13–17.

9. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы / Пер. с англ. Р.С. Исмагилова и Б.С. Митягина; под ред. А.Г. Костюченко. – М.: Мир, 1974. – 665 с.
10. *Kato T.* Wave Operators and Similarity for Some Non-selfadjoint Operators // Math. Annalen. – 1966. – **162**. – P. 258–279.
11. *Karataeva T.V., Koshmanenko V.D.* Generalized sum of operators // Math. Notes. – 2000. – **66**, № 5-6. – P. 556–564.
12. *Dudkin M.E., Koshmanenko V.D.* The point spectrum of self-adjoint operators that appears under singular perturbations of finite rank // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 9. – P. 1532–1541.

References

1. S. Albeverio *et al.*, *Solvable Models in Quantum Mechanics,* 2nd ed., appendix by P. Exner. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005, 488 p.
2. S. Albeverio and P. Kurasov, "Singular perturbations of differential operators. solvable schrцdinger type operators", in *London Math. Soc. Lecture Note*, Ser. 271. Cambridge, GB: Cambridge University Press, 2000.
3. V. Koshmanenko, "Singular quadratic forms in perturbation theory", in *Mathematics and its Applications,* vol. 474, 1999.
4. Y. Berezansky and J. Brasche, "Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 7, no. 3, pp. 54–66, 2001.
5. S. Albeverio *et al.*, "Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators", *Inverse Problems*, vol. 23, pp. 523–535, 2007.
6. L. Nizhnik, "Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem", *Inverse Problems*, vol. 26, pp. 523–535, 2010.
7. L. Nizhnik, "Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation", *Tamkang J. Math.*, vol. 42, no. 3, pp. 385–394, 2011.
8. T.I. Vdovenko and M.E. Didkin, "Strong singular perturbations of rank one by nonsymmetric potentials", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 13–17, 2014 (in Ukrainian).
9. N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators. Spectral Operators.* Moscow, USSR: Mir, 1974, 665 p.
10. T. Kato, "Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators", *Math. Annalen*, vol. 162, pp. 258–279, 1966.
11. T.V. Karataeva and V.D. Koshmanenko, "Generalized sum of operators", *Math. Notes*, vol. 66, no 5-6, pp. 556–564, 2000.
12. M.E. Dudkin and V.D. Koshmanenko, "The point spectrum of self-adjoint operators that appears under singular perturbations of finite rank", *Ukr. Math. J.*, vol. 55, no. 9, pp. 1532–1541, 2003.

Т.І. Вдовенко

ХВИЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Проблематика. Розглядаються несамоспряжені сингулярні збурення рангу один самоспряженого оператора несиметричним потенціалом, тобто вирази вигляду

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\delta_1\rangle\delta_2,$$

де A – самоспряжений напівобмежений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Актуальність дослідження полягає в тому, що невідомо, чи є $\tilde{A}$ спектральним оператором при $\delta_1 \neq \delta_2$ для векторів $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{H}_{-1}$.

Мета дослідження. Встановлення існування хвильових операторів у $\tilde{A}$ за умови "слабо-слабо" сингулярного збурення рангу "один-один":

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}) = 1,\ \dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1,$$

де підмножини

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\},\quad \mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^*f\}$$

обидві щільні в $\mathcal{H}$.

Методика реалізації. Використовується відома теорема Като, яка застосовується до оператора вигляду $\tilde{A}$.

Результати. З використанням конструктивного опису $\tilde{A}$ доводиться існування хвильових операторів при $|\alpha| < \infty$, відповідних $\tilde{A}$. Хвильові оператори визначаються рівністю

$$(\tilde{W}_{\pm}u, v) = (u, v) \mp \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle R_{\lambda\pm i0}u, \omega_1\rangle\langle\omega_2, \tilde{R}^*_{\lambda\mp i0}v\rangle d\lambda,\quad u, v \in \mathcal{H},$$

де $\tilde{R}$ і R – резольвенти збуреного і незбуреного операторів.

Висновки. Доведено існування хвильових операторів та показано їх спосіб дії для сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом.

Ключові слова: сингулярні збурення; задача на власні значення; формула Крейна; несамоспряжене збурення; хвильові оператори.

Т.И. Вдовенко

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ РАНГА ОДИН НЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Проблематика. Рассматриваются несамосопряженные сингулярные возмущения ранга один самосопряженного оператора несимметричным потенциалом, то есть выражения вида

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\delta_1\rangle\delta_2,$$

где A – самосопряженный полуограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Актуальность исследования заключается в том, что неизвестно, является ли $\tilde{A}$ спектральным оператором при $\delta_1 \neq \delta_2$ для векторов $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{H}_{-1}$.

Цель исследования. Установление существования волновых операторов у $\tilde{A}$ при условии “слабо-слабо” сингулярного возмущения ранга “один-один”:

$$\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}) = 1,\ \dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_*) = 0,\ \dim(\mathcal{H}_{+1} \ominus \mathfrak{D}_*) = 1,$$

где подмножества

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\},\quad \mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^*f\}$$

оба плотны в $\mathcal{H}$.

Методика реализации. Используется известная теорема Като, которая применяется для оператора вида $\tilde{A}$.

Результаты. С использованием конструктивного описания $\tilde{A}$ доказывается существование волновых операторов при $|\alpha| < \infty$, соответствующих $\tilde{A}$. Волновые операторы определяются равенством

$$(\tilde{W}_{\pm}u, v) = (u, v) \mp \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle R_{\lambda\pm i0}u, \omega_1\rangle\langle\omega_2, \tilde{R}^*_{\lambda\mp i0}v\rangle d\lambda,\quad u, v \in \mathcal{H},$$

где $\tilde{R}$ и R – резольвенты возмущенного и невозмущенного операторов.

Выводы. Доказано существование волновых операторов, и указан способ их действия для сингулярного возмущения ранга один несимметричным потенциалом.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; задача на собственные значения; формула Крейна; несамосопряженные возмущения; волновые операторы.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
27 січня 2015 року