УДК 519.21

Ю.О. Грегуль
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ТОЧНОЇ АСИМПТОТИКИ РЯДІВ ВЕЛИКИХ УХИЛЕНЬ[1]

Background. In the paper the sequence of independent identically distributed random variables $\{X_k, k\ge 1\}$ is considered. We are interested in conditions for the convergence of series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(|S_n|\ge n^{1/p}\varepsilon)$ for different values of parameters $\alpha\ge -1$, $0<p<2$ and any $\varepsilon>0$. Such series appears while studying complete convergence as well as investigating various problems on large deviations in limit theorems of probability theory. The new approach to study such series is proposed by C. Heyde, who showed that if $EX_1=0$, $EX_1^2=\sigma^2<\infty$ then $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n|\ge n\varepsilon)=\sigma^2$. Further, this result was extended by O. Klesov, and finally generalized by A. Gut, J. Steinebach and J. Hi for the series $\lambda_{r,p}(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2}P(|S_n|\ge n^{1/p}\varepsilon)$, with $0<p<2$, and $r\ge 2$.

Objective. We consider the series $\lambda(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}P(S_n\ge n\varepsilon)$ for one-side deviations. The main purpose of the paper is to study precise asymptotics of function $\lambda(\varepsilon)$ while $\varepsilon\downarrow 0$.

Methods. The methods used to prove the main result is as follows: first we find the asymptotics of $\lambda(\varepsilon)$ for the partial case, i.e. we assume that random variables are Gaussian random variables, further we extend obtained result to the general case by means of estimations of rate of convergence in the Central limit theorem.

Results. In the paper the precise asymptotics of series $\lambda(\varepsilon)$ while $\varepsilon\downarrow 0$, for $0<\alpha<1/2$ is obtained. Strict assumptions imposed on parameter α, are connected with the application of Nagaev inequality on the rate of convergence in the Central limit theorem.

Conclusions. The asymptotics $\lambda(\varepsilon)$ ought to be considered for other values of α as well. This requires though new techniques since the use of Nagaev inequality leads to some restrictions upon α. Since series $\lambda(\varepsilon)$ converges (under some moment conditions) for any $\alpha>-1$ then further investigations may concern the behavior of this series for $-1\le\alpha<0$ and $\alpha>1/2$.

Keywords: precise asymptotics; convergence rate; series of large deviations.

Вступ

Розглянемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_k$, $\{X_k, k\ge 1\}$. Нас цікавлять умови збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(|S_n|\ge n^{1/p}\varepsilon) \tag{1}$$

для різних значень параметрів $\alpha\ge -1$ і $0<p<2$, де $S_1=X_1$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$, $n>1$ — часткові суми послідовності $\{X_k, k\ge 1\}$.

При $\alpha=0$ збіжність ряду (1) буде означати повну збіжність до нуля послідовності $\{S_n/n^{1/p}, n\ge 1\}$ [1]. Зазначимо також, що при $\alpha<-1$ ряд (1) збіжний для будь-яких послідовностей випадкових величин при довільному $\varepsilon>0$. П. Сюй і Г. Роббінс [1] знайшли достатню умову збіжності ряду (1) для $\alpha=0$, $p=1$, а саме: послідовність $\{S_n/n, n\ge 1\}$ збігається до нуля повністю, якщо $EX_1=0$ та $EX_1^2<\infty$. Необхідність цієї умови була доведена П. Ердешем [2].

Наступні дослідження проведені для $\alpha=-1$, $p=1$ Ф. Спіцером [3]. Згодом М. Катц [4, 5] та Л. Баум [5] узагальнили результати П. Сюя, Г. Роббінса, П. Ердеша та Ф. Спіцера для $\alpha\ge -1$, $0<p<2$.

Покладемо

$$\lambda_{r,p}(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2}P(|S_n|\ge n^{1/p}\varepsilon).$$

[1] Роботу підтримано грантом IZ73Z0_152292 від CNRS (науковий фонд Швейцарії).

Новий напрям досліджень таких рядів належить К. Хейді [6]. Припустимо, що виконуються такі умови:

$$EX_1 = 0,\ \ EX_1^2 = \sigma^2 < \infty. \tag{2}$$

К. Хейді [6] показав, що при виконанні умов (2) має місце властивість

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^2 \lambda_{2,1}(\varepsilon) = \sigma^2.$$

О. Клесов [7] посилив результат К. Хейді, встановивши, що $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(\lambda_{2,1}(\varepsilon) - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \right) = -\frac{1}{2}$, якщо до умов (2) додати вимогу $E|X|^3 < \infty$. Результати О. Клесова були узагальнені А. Гутом і Дж. Штайнебахом [8] та Дж. Хі [9] для ряду $\lambda_{r,p}(\varepsilon) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P(|S_n| \ge n^{1/p}\varepsilon)$, якщо $0 < p < 2,\ r \ge 2$.

Постановка задачі

Розглянемо ряд, аналогічний (1) для односторонніх ухилень з $p = 1$, а саме:

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(S_n \ge n\varepsilon). \tag{3}$$

Метою роботи є знаходження точної асимптотики функції $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Метод доведення полягає у тому, що спочатку знаходиться асимптотика для часткового випадку гауссових випадкових величин, а потім він переноситься на загальний за допомогою оцінки швидкості збіжності у центральній граничній теоремі.

Основні результати

Для доведення основних результатів нам знадобиться декілька допоміжних лем.

Лема 1. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, $\alpha \le \frac{1}{2}$, $\alpha \ne -\frac{1}{2}$.

Тоді

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \delta^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n} = \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

де $\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx.$

Доведення. Дійсно, для довільних $n \ge 1$ маємо

$$\int\limits_{\delta(n-1)}^{\delta n} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx \ge \delta^{\alpha+\frac{1}{2}} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n},$$

тому

$$\limsup_{\delta\downarrow 0} \delta^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n} \le \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx. \tag{5}$$

Аналогічно, для довільних $n \ge 1$ маємо

$$\int\limits_{\delta n}^{\delta(n+1)} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx \le \delta^{\alpha+\frac{1}{2}} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n},$$

підсумувавши, отримаємо

$$\delta^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n} \ge \int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx,$$

перейшовши до границі, маємо

$$\liminf_{\delta\downarrow 0} \delta^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\delta n} \ge \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-\frac{1}{2}} dx. \tag{6}$$

Об'єднуючи результати (5) та (6), отримаємо рівність (4).

Лема 2. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні однаково розподілені гауссові випадкові величини з $EX_1 = 0,\ \sigma^2 = 1$ та $-1 < \beta < \frac{1}{2}$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\varepsilon^{2\beta} \bar{\lambda}(\varepsilon) - \frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2} \right) = C_2(\beta), \tag{7}$$

де $\bar{\lambda}(\varepsilon) = \frac{1}{\beta+1} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\beta+1} \int\limits_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x) dx,\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$C_1(\beta) = \frac{2^{\beta} \Gamma\left(\beta + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\beta+1)},\quad C_2(\beta) = -\frac{2^{\beta-2} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Доведення. Розглянемо ряд

$$\bar{\lambda}(\varepsilon) = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta+1} \int\limits_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2}}{\varepsilon^{2\beta+2}} \int\limits_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{2\beta+2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} x^{2\beta+2} \varphi(x) dx - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})\,\varphi(x)dx\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{2\beta+2}}\Bigg(\int_0^{\infty}x^{2\beta+2}\varphi(x)dx-\int_0^{\varepsilon}x^{2\beta+2}\varphi(x)dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})\varphi(x)dx\Bigg).$$

Тоді

$$\varepsilon^{2\beta}\overline{\lambda}(\varepsilon)-\frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\frac{1}{\beta+1}\Bigg(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty}x^{2\beta+2}e^{-x^2/2}dx-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}x^{2\beta+2}e^{-x^2/2}dx-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})e^{-x^2/2}dx\Bigg)-\frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\Bigg(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}x^{2\beta+2}e^{-x^2/2}dx+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})e^{-x^2/2}dx\Bigg),\quad(8)$$

оскільки після заміни змінної маємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty}x^{2\beta+2}e^{-x^2/2}dx=$$

$$=\frac{2^{\beta}}{\sqrt{\pi}(\beta+1)}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty}t^{\beta+\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{2^{\beta}\Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\beta+1)}\frac{1}{\varepsilon^2}=\frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2}.$$

Застосувавши правило Лопіталя, отримаємо такий результат:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{\varepsilon}x^{2\beta+2}e^{-x^2/2}dx=0.\quad(9)$$

Дослідимо останній інтеграл у рівності (8). Позначивши $I_k=\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})dx$, отримаємо нерівність

$$I_k e^{-\frac{\varepsilon^2(k+1)}{2}}\le$$

$$\le\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}(x^{2\beta+2}-(\varepsilon\sqrt{k})^{2\beta+2})e^{-x^2/2}dx\le I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}.\quad(10)$$

Перейшовши до границі в рівності (8), врахувавши результат (9) та нерівність (10), матимемо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\varepsilon^{2\beta}\overline{\lambda}(\varepsilon)-\frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}.\quad(11)$$

Використаємо розклад Тейлора $\sqrt{x+1}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O(x^3)$, $0\le x\le 1$, отримаємо таке представлення для інтегралу I_k:

$$I_k=\varepsilon^{2\beta+3}\left(\frac{\beta+1}{4}k^{\beta-\frac{1}{2}}+O(k^{\beta-\frac{3}{2}})\right).$$

Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}=\frac{\beta+1}{4}\varepsilon^{2\beta+1}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}k^{\beta-\frac{1}{2}}+$$

$$+O\left(\varepsilon^{2\beta+1}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}k^{\beta-\frac{3}{2}}\right).\quad(12)$$

Покладемо $\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}$, тоді рівність (12) набуде вигляду

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}=(\beta+1)2^{\beta-\frac{3}{2}}\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\delta k}k^{\beta-\frac{1}{2}}+$$

$$+O\left(\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\delta k}k^{\beta-\frac{3}{2}}\right).\quad(13)$$

Згідно з формулою (11) для доведення леми 2 нам залишилось знайти $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}}$; для цього розглянемо окремо кожен доданок рівності (13).

Враховуючи лему 1, бачимо, що перший доданок буде мати скінченну границю, а саме

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(\beta+1)2^{\beta-\frac{3}{2}}\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\delta k}k^{\beta-\frac{1}{2}}=$$

$$= (\beta+1)2^{\beta-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right). \qquad (14)$$

Покажемо тепер, що другий доданок рівності (13) прямує до нуля при $\delta \downarrow 0$. Для цього зафіксуємо деяке $\gamma > 0$,

$$\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} = \delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k\le\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} +$$

$$+\,\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k>\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}}. \qquad (15)$$

Розглянемо спочатку другий доданок рівності (15):

$$\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k>\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} = \delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k>\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k}\frac{1}{k}\cdot k^{\beta-\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \delta^\gamma\left(\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k>\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{1}{2}}\right).$$

Вираз у дужках має скінченну границю за формулою (4), отже, при $\gamma > 0$ та $\delta \downarrow 0$ другий доданок формули (15) прямує до нуля:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k>\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} = 0. \qquad (16)$$

Тепер повернемось до першого доданку співвідношення (15). У випадку $\beta \ne \frac{1}{2}$ виберемо $\gamma > \max\left\{0; \frac{\beta+\frac{1}{2}}{\beta-\frac{1}{2}}\right\}$, тоді

$$\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k\le\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} = \delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k\le\frac{1}{\delta^\gamma}} k^{\beta-\frac{3}{2}} \le$$

$$\le C\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\delta^\gamma}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} = C\delta^{\beta+\frac{1}{2}-\gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\delta^{\beta+\frac{1}{2}}\sum_{k\le\frac{1}{\delta^\gamma}} e^{-\delta k} k^{\beta-\frac{3}{2}} = 0. \qquad (17)$$

Отже, з властивостей (14), (16) та (17) випливає, що

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty} I_k e^{-\frac{\varepsilon^2 k}{2}} = (\beta+1)2^{\beta-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right).$$

Підставимо останній результат у формулу (11):

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\varepsilon^{2\beta}\overline{\lambda}(\varepsilon) - \frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\beta+1}(\beta+1)2^{\beta-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2^{\beta-2}\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = C_2(\beta).$$

Лему 2 доведено.

Теорема 1. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні однаково розподілені гауссові випадкові величини з $EX_1 = 0$, $\sigma^2 = 1$ та $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, $\lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P(S_n \ge n\varepsilon)$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\varepsilon^{2\alpha}\lambda(\varepsilon) - \frac{C_1(\alpha)}{\varepsilon^2}\right) = 0,$$

де $C_1(\alpha) = \dfrac{2^\alpha\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\alpha+1)}$.

У доведенні теореми зручним є позначення $C_2(\alpha) = -\dfrac{2^{\alpha-2}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$.

Доведення. Розглянемо ряд $\lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P(S_n \ge n\varepsilon)$. Перетворимо його, використовуючи розклад Ейлера–Маклорена для часткової суми $\sum_{1\le n<k} n^\alpha$:

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P(S_n \ge n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty}\varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \sum_{k=n}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}\varphi(x)dx\left(\sum_{n=1}^{k} n^\alpha\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}}\varphi(x)dx\left(\sum_{1\le n<k} n^\alpha + k^\alpha\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx \left(\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{2}k^{\alpha} + \frac{\alpha}{12}k^{\alpha-1} + \right.$$

$$\left. + C_{\alpha} + R_2(k) \right),$$

де $C_{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{12}$, $R_2(k) = -\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \times \int_1^k B_2(\{x\})x^{\alpha-2}dx$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ — многочлен Бернуллі.

Таким чином,

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx +$$

$$+ \frac{\alpha}{12}\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx +$$

$$+ C_{\alpha}\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} R_2(k) \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx .$$

Кожен із п'яти отриманих доданків позначимо I_j, $1 \le j \le 5$, відповідно. Тому $\lambda(\varepsilon) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$. Звідси отримуємо

$$\varepsilon^{2\alpha}\lambda(\varepsilon) - \frac{C_1(\alpha)}{\varepsilon^2} = \varepsilon^{2\alpha}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) -$$

$$- \frac{C_1(\alpha)}{\varepsilon^2} = \left(\varepsilon^{2\alpha} I_1 - \frac{C_1(\alpha)}{\varepsilon^2} \right) + \varepsilon^{2\alpha}(I_2 + I_3 + I_4 + I_5).$$

Вираз $\varepsilon^{2\alpha} I_1 - \frac{C_1(\alpha)}{\varepsilon^2}$ прямує до константи $C_2(\alpha)$ згідно з лемою 2, оскільки $I_1 = \overline{\lambda}(\varepsilon)$ при $\beta = \alpha$. З'ясуємо поведінку решти доданків $\varepsilon^{2\alpha} I_j$, $2 \le j \le 5$, при $\varepsilon \downarrow 0$.

Розглянемо другий доданок: $\varepsilon^{2\alpha} I_2 = \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{2} \times \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx = \frac{\varepsilon^{2(\beta+1)}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta+1} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx$, де $\beta = \alpha - 1$. Тоді

$$\varepsilon^{2\alpha} I_2 = \varepsilon^{2(\beta+1)} \frac{\beta+1}{2} \overline{\lambda}(\varepsilon) =$$

$$= \frac{\beta+1}{2}\varepsilon^2 \left(\varepsilon^{2\beta}\overline{\lambda}(\varepsilon) - \frac{C_1(\beta)}{\varepsilon^2} \right) + \frac{\beta+1}{2} C_1(\beta),$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} I_2 = \frac{\beta+1}{2} C_1(\beta) =$$

$$= \frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -C_2(\alpha). \qquad (18)$$

Нехай $\Phi(x)$ — стандартна гауссова функція розподілу.

Використовуючи перетворення Абеля, отримаємо таку оцінку для третього доданка:

$$\varepsilon^{2\alpha} I_3 = \varepsilon^{2\alpha} \frac{\alpha}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-1}(\Phi(\varepsilon\sqrt{k+1}) - \Phi(\varepsilon\sqrt{k})) \le$$

$$\le \varepsilon^{2\alpha} \frac{\alpha}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\varepsilon\sqrt{k}) k^{\alpha-1}(k^{\alpha-1} - (k-1)^{\alpha-1}) \le$$

$$\le \varepsilon^{2\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(\varepsilon\sqrt{k}) k^{\alpha-2} \le$$

$$\le \varepsilon^{2\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2}.$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} I_3 = 0. \qquad (19)$$

Тепер перейдемо до четвертого доданка. Очевидно, що при $\alpha > 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} I_4 = C_{\alpha} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0. \qquad (20)$$

Оцінимо останній доданок:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} R_2(k) \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx \right| =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^k B_2(\{x\}) x^{\alpha-2} dx \cdot \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx \right| \le$$

$$\le C \sum_{k=1}^{\infty} x^{\alpha-1} \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx = C I_3.$$

З доведеного вище факту (19) випливає

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} R_2(k) \int_{\varepsilon\sqrt{k}}^{\varepsilon\sqrt{k+1}} \varphi(x)\,dx = 0 . \qquad (21)$$

Отже, враховуючи лему 2 та формули (18)–(21), доводимо теорему 1.

Зауваження. При $\alpha = 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} I_4 = C_\alpha \int_0^\infty \varphi(x)dx = C_\alpha .$$

При $\alpha < 0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{2\alpha} I_4 = \infty .$$

Сформулюємо головний результат роботи. Для цього введемо такі позначеня:

$\lambda_F(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P(S_n \geq n\varepsilon)$, де S_n – сума незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з функцією розподілу F.

Функція $\lambda(\varepsilon)$, яка вивчалась у теоремі 1, тепер позначається $\lambda_\Phi(\varepsilon)$, тобто $\lambda_\Phi(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha P(S_n^* \geq n\varepsilon)$, де S_n^* – сума стандартних гауссових випадкових величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Теорема 2. Нехай $EX_1 = 0$, $\sigma^2 = 1$, $E|X_1|^3 < \infty$ та $-1 < \alpha < 1$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} |\lambda_F(\varepsilon) - \lambda_\Phi(\varepsilon)| = 0. \qquad (22)$$

Доведення. Використаємо нерівність Нагаєва [10]:

$$|P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| \leq$$
$$\leq A \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})^3}, \qquad (23)$$

яка виконується для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $n \geq 1$, A – деяка константа.

Для доведення теореми достатньо показати

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| = 0. \qquad (24)$$

Зафіксуємо $0 < \delta_1 < \delta_2$ та покладемо $m_1 = \left[\frac{\delta_1}{\varepsilon^{3/2}}\right]$, $m_2 = \left[\frac{\delta_2}{\varepsilon^{3/2}}\right]$.

Тоді, використовуючи нерівність (23), отримаємо

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| =$$
$$= \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{m_1} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=m_2+1}^{\infty} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| \leq \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{m_1} n^\alpha + \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} A \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3} \sum_{n=m_1+1}^{m_2} n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})^3} +$$
$$+ \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} A \frac{E|X_1|^3}{\sigma^3} \sum_{n=m_2+1}^{\infty} n^\alpha \frac{1}{\sqrt{n}(1+\sqrt{n})^3} \leq$$
$$\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} m_1^{\alpha+1} + B_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \frac{m_2 - m_1}{m_1^{1/2-\alpha}} +$$
$$+ B_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \frac{1}{m_2^{1-\alpha}} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon^{3/2}}\right)^{\alpha+1} +$$
$$+ B_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) m_1^{1/2+\alpha} +$$
$$+ B_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \frac{1}{\left(\frac{m_2}{\delta_2/\varepsilon^{3/2}}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\delta_2}{\varepsilon^{3/2}}\right)^{1-\alpha}} \leq C\delta_1^{1+\alpha} +$$
$$+ B_1 \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) \left(\frac{m_1}{\delta_2/\varepsilon^{3/2}}\right) \cdot \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon^{3/2}}\right)^{1/2+\alpha} +$$
$$+ B_2 \frac{1}{\left(\frac{m_2}{\delta_2/\varepsilon^{3/2}}\right)^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{\delta_2^{1-\alpha}} \leq C\delta_1^{1+\alpha} +$$
$$+ B_1 \varepsilon^{\frac{3}{4}} \left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) \left(\frac{m_1}{\delta_2/\varepsilon^{3/2}}\right)^{1/2+\alpha} \cdot \delta_1^{1/2+\alpha} +$$
$$+ B_2 \frac{1}{\left(\frac{m_2}{\delta_2/\varepsilon^{3/2}}\right)^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{\delta_2^{1-\alpha}} .$$

В останній нерівності перейдемо до границі при $\varepsilon \downarrow 0$. Враховуючи співвідношення $\frac{m_1}{\frac{\delta_1}{\varepsilon^{3/2}}} \to 1$, $\frac{m_2}{\frac{\delta_2}{\varepsilon^{3/2}}} \to 1$, $\frac{m_2}{m_1} - 1 \to \frac{\delta_2}{\delta_1}$, отримаємо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{\frac{3}{2}(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |P(S_n \geq n\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})| \leq$$

$$\le C\delta_1^{1+\alpha} + B \cdot \frac{1}{\delta_2^{1-\alpha}}.$$

Перейшовши до границі при $\delta_1 \to 0$ та $\delta_2 \to \infty$, отримаємо співвідношення (24), що і доводить теорему 2.

Висновки

У роботі отримано точну асимптотику ряду (3) при $\varepsilon \downarrow 0$, для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Ці обмеження виникають через застосування нерівності Нагаєва [10], яка описує швидкість збіжності у центральній граничній теоремі. Оскільки ряд (3) збігається (за певних моментних умов) для будь-якого $\alpha > -1$, то подальші дослідження будуть стосуватись поведінки ряду (3) для $-1 \le \alpha < 0$ та $\alpha > \frac{1}{2}$.

Список літератури

1. *Hsu P.L., Robbins H.* Complete convergence and the law of large numbers // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1947. – **33**. – P. 25–31.
2. *Erdцs P.* On a theorem of Hsu and Robbins // Ann. Math. Statist. – 1949. – **20**. – P. 287–291.
3. *Spitzer F.* A combinatorial lemma and its application to probability theory// Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 323–339.
4. *Katz M.* The probability in the tail of distribution // Ann. Math. Statist. – 1963. – **34**. – P. 312–318.
5. *Baum L.E., Katz M.* Convergence rates in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **120**. – P. 108–123.
6. *Heyde C.C.* A supplement to the strong law of large numbers // J. Appl. Probab. – 1975. – **12**. – P. 903–907.
7. *Klesov O.I.* On the convergence rate in a theorem of Heyde // Theory Probab. Math. Stat. – 1994. – **49**. – P. 83–87.
8. *Gut A., Steinebach J.* Precise asymptotics – a general approach // Acta Math. Hung. – 2013. – **138**. – P. 365–385.
9. *He J.* A note to the convergence rates in precise asymptotics // J. Inequalities Appl. – 2013. – **378**. – Режим доступу: http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/378.
10. *Nagaev S.V.* Some limit theorems for large deviations // Teor. Veroyatnost. I Primenen. – 1965. – **10**. – P. 231–254.

References

1. P.L. Hsu and H. Robbins, "Complete convergence and the law of large numbers", *Proc. Nat. Acad. Sci.USA*, vol. 33, pp. 25–31, 1947.
2. P. Erdцs, "On a theorem of Hsu and Robbins", *Ann. Math. Statist.*, vol. 20, pp. 287–291, 1949.
3. F. Spitzer, "A combinatorial lemma and its application to probability theory", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, pp. 323–339, 1956.
4. M. Katz, "The probability in the tail of distribution", *Ann. Math. Statist.*, vol. 34, pp. 312–318, 1963.
5. L.E. Baum, M. Katz, "Convergence rates in the law of large numbers", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 120, pp. 108–123, 1965.
6. C.C. Heyde, "A supplement to the strong law of large numbers", *J. Appl. Probab.*, vol. 12, pp. 903–907, 1975.
7. O.I. Klesov, "On the convergence rate in a theorem of Heyde", *Theory Probab. Math. Stat.*, vol. 49, pp. 83–87, 1994.
8. A. Gut, J. Steinebach, "Precise asymptotics – a general approach", *Acta Math. Hung.*, vol. 138, pp. 365–385, 2013.
9. J. He, "A note to the convergence rates in precise asymptotics", *J. Inequalities Appl.*, vol. 378, 2013 [Online]. Avaliable: http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/378
10. S.V. Nagaev, "Some limit theorems for large deviations", *Teor. Veroyatnost. I Primenen.*, vol. 10, pp. 231–254, 1965.

Ю.О. Грегуль

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ТОЧНОЇ АСИМПТОТИКИ РЯДІВ ВЕЛИКИХ УХИЛЕНЬ

Проблематика. Розглядається послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_k, k \ge 1\}$. Нас цікавлять умови збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(|S_n| \ge n^{1/p}\varepsilon)$ для різних значень параметрів $\alpha \ge -1$ і $0 < p < 2$ при довільному $\varepsilon > 0$. Такі ряди виникають при вивченні повної збіжності та дослідженні різноманітних питань стосовно великих ухилень у граничних теоремах теорії ймовірностей. Новий напрям досліджень таких рядів належить К. Хейді, який показав, що при виконанні умов $EX_1 = 0,\ EX_1^2 = \sigma^2 < \infty$ має місце властивість $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \ge n\varepsilon) = \sigma^2$. О. Клесов посилив результат

К. Хейді, а результати О. Клесова були узагальнені А. Гутом, Дж. Штайнебахом та Дж. Хі для ряду $\lambda_{r,p}(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P(|S_n| \geq n^{1/p}\varepsilon)$, якщо $0<p<2$, $r \geq 2$.

Мета дослідження. Розглянемо ряд для односторонніх ухилень $\lambda(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(S_n \geq n\varepsilon)$. Метою роботи є знаходження точної асимптотики функції $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Методика реалізації. Метод доведення полягає у тому, що спочатку знаходиться асимптотика для часткового випадку гауссових випадкових величин, а потім він переноситься на загальний за допомогою оцінки швидкості збіжності у центральній граничній теоремі.

Результати дослідження. В роботі отримано точну асимптотику ряду $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ для $0<\alpha<1/2$. Ці обмеження виникають через застосування нерівності Нагаєва, яка описує швидкість збіжності у центральній граничній теоремі.

Висновки. Асимптотику $\lambda(\varepsilon)$ необхідно розглядати і для інших значень α, але це потребує нових методів, оскільки використання нерівності Нагаєва і призводить до обмежень на α. Оскільки ряд $\lambda(\varepsilon)$ збігається (за певних моментних умов) для будь-якого $\alpha>-1$, то подальші дослідження будуть стосуватись поведінки ряду для $-1 \leq \alpha < 0$ та $\alpha > 1/2$.

Ключові слова: точна асимптотика; швидкість збіжності; ряд великих ухилень.

Ю.А. Грегуль

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ТОЧНОЙ АССИМПТОТИКИ ДЛЯ РЯДОВ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Проблематика. Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_k, k \geq 1\}$. Нас интересуют условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(|S_n| \geq n^{1/p}\varepsilon)$ для разных значений параметров $\alpha \geq -1$ и $0<p<2$ и произвольного $\varepsilon>0$. Такие ряды возникают при изучении полной сходимости и исследовании различных вопросов, касающихся больших уклонений в предельных теоремах теории вероятностей. Новое направление исследований таких рядов принадлежит К. Хейди, который показал, что если $EX_1=0$, $EX_1^2=\sigma^2<\infty$, то $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(|S_n| \geq n\varepsilon)=\sigma^2$. О. Клесов усилил результат К. Хейди, а результаты Клесова были обобщены А. Гутом, Дж. Штайнебахом и Дж. Хи для ряда $\lambda_{r,p}(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} P(|S_n| \geq n^{1/p}\varepsilon)$, если $0<p<2$, $r \geq 2$.

Цель исследования. Рассмотрим ряд для односторонних уклонений $\lambda(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(S_n \geq n\varepsilon)$. Целью работы является нахождение точной ассимптотики функции $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Методика реализации. Метод доказательства заключается в следующем: сначала находится ассимптотика для частичного случая гауссовских случайных величин, а потом он переносится на общий при помощи оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме.

Результаты исследования. В работе получена точная ассимптотика ряда $\lambda(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ для $0<\alpha<1/2$. Эти ограничения возникают из-за применения неравенства Нагаева, которое описывает скорость сходимости в центральной предельной теореме.

Выводы. Ассимптотику $\lambda(\varepsilon)$ необходимо рассматривать и для других значений α, но это требует новых методов, поскольку использование неравенства Нагаева и приводит к ограничениям для α. Так как ряд $\lambda(\varepsilon)$ сходится (при определенных моментных условиях) для произвольного $\alpha>-1$, то дальнейшие исследования будут касаться поведения ряда для $-1 \leq \alpha < 0$ и $\alpha > 1/2$.

Ключевые слова: точная ассимптотика; скорость сходимости; ряд больших уклонений.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
10 червня 2015 року