ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 519.8

В.М. Александрова, О.Є. Кірік

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ Й АЛГОРИТМИ ДЛЯ МЕРЕЖЕВИХ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

The efficient algorithms for nonlinear programming problems for calculating networks have been offered, as well as the new network models to determine the optimal flows and distribution of resources have been constructed. The problems with nonlinear objective functions of general form and network structure of restrictions, which allow reaching quite a wide range of networks using common approach, were considered. For calculations the modifications of well-known methods of nonlinear programming were applied. The proposed methods of the first order is comparable by convergence rate with the methods of sequential quadratic programming through an efficient algorithm for the solution of the auxiliary quadratic problems and convenient procedure of step factor calculation. A series of models of resource distribution problems, taking into account the customers' orders, the variable performance of sources and temporary storage of the product, was analyzed and numerically tested. The comparison of calculation results of applied problems using a standard package Solver and a specially designed computer program by the method of linearization of B.M. Pshenichniy demonstrated the possibility of reducing the number of iterations in the procedures of the same order by several times. The constructed models and algorithms of optimization of flow distribution allow creating effective information-analytical system for optimum control of functioning of the network distribution systems.

Keywords: problems of flow distribution, network models, methods of nonlinear programming, optimization algorithms.

Вступ

Одними з ключових аспектів системних досліджень складних технічних комплексів є математичне моделювання, методи оптимізації та інші формалізовані засоби обґрунтування процесу прийняття рішень. Базове значення формалізованих моделей і методів як основного апарату вивчення великих багатофункціональних систем зростає з підвищенням складності самих систем. Зокрема, оптимізаційні задачі розподілу потоків енергетичних ресурсів зазвичай нелінійні, мають великі розміри і специфічну, часто мережеву, структуру.

Заміна складної вихідної задачі послідовністю більш простих задач або задач, які легко можуть бути розв'язані із застосуванням спеціальних прийомів, є найбільш ефективним в обчислювальному відношенні підходом у теорії та методах оптимізації. Найвідомішими у нелінійному програмуванні є різноманітні методи, що застосовують лінеаризацію або квадратичну апроксимацію нелінійних функцій. Найбільш високу ефективність продемонстрували методи послідовного квадратичного програмування, що ґрунтуються на працях [1–3]. При реалізації цих методів на кожній ітерації здійснюється квадратична апроксимація функції Лагранжа основної задачі та будується задача квадратичного програмування, розв'язок якої використовується для формування напрямку в процедурі лінійного пошуку.

При застосуванні методу лінеаризації Б.М. Пшеничного та його модифікацій [4] відбувається заміна нелінійної оптимізаційної задачі послідовністю квадратичних задач, цільові функції яких є квадратичною апроксимацією цільової функції або її лінійною апроксимацією з додаванням квадратичного штрафу за великі відхилення аргументу.

Завдяки особливостям структури нелінійних задач розподілу потоків квадратична апроксимація цільових функцій цих задач збігається з квадратичною апроксимацією їх функцій Лагранжа. При виборі відповідного методу розв'язання допоміжних задач квадратичного програмування та методу обчислення крокового множника на основній ітерації алгоритму можна казати про близькість оцінок ефективності методів Б.М. Пшеничного та послідовного квадратичного програмування для задач розподілу потоків.

Ця стаття є продовженням досліджень, що проводилися у [5], де побудовано та досліджено алгоритми для квадратичних задач розподілу потоків, які слугують допоміжними для більш загальних нелінійних задач. Ці задачі зводилися до двоїстих задач із простими обмеженнями на частину змінних, а метод спряжених градієнтів для їх розв'язання піддавався відповідній модифікації. З огляду на включення у двоїсту задачу всіх обмежень розглянутий підхід рекомендувався для розрахунку мереж середньої розмірності.

Нижче пропонується метод розв'язання нелінійної задачі розподілу потоків, що базується на прямому розв'язанні допоміжної задачі квадратичного програмування. Цей підхід дасть змогу розв'язувати на внутрішніх ітераціях задачі меншої розмірності, ніж вихідна, менше накопичувати похибок обчислень і, таким чином, може рекомендуватися для розрахунку мереж більшої розмірності.

Постановка задачі

Розглядається задача розподілу потоків у розподільчих мережах, що представляються у вигляді зв'язних плоских графів. Споживачі, джерела та резервуари тимчасового зберігання розміщені у вершинах (вузлах) графа, транспортні ділянки відповідають його дугам. Проблема формулюється у вигляді екстремальної задачі з нелінійною цільовою функцією, обмеженнями-рівностями, що відображають розподіл потоків уздовж мережі, та двосторонніми технологічними обмеженнями на змінні. Задається така інформація: об'єм подачі речовини (газу, нафти, води) в систему, потреби споживачів, довжина ділянок розподільчої системи та технологічні обмеження на її пропускну здатність. Потрібно розподілити потоки вздовж мережі таким чином, щоб задовольнити всіх споживачів із найменшими загальними витратами на доставку продукту.

Метою роботи є розробка ефективних алгоритмів нелінійного програмування для задач розрахунку мереж, а також аналіз та побудова нових мережевих моделей для визначення оптимальних потоків і розподілу ресурсів.

Математична модель

Нехай граф $G=(N,V)$ містить n вершин (множина N) і m дуг (множина V). Кожній дузі $v\in V$ зіставлена упорядкована пара вершин (i,j), $i,j\in N$, що є її початком і кінцем. Для кожної вершини i відоме споживання d_i, а кожній дузі графа v приписаний деякий потік x_v, обмежений знизу та зверху величинами r_v^- і r_v^+, та функція вартості протікання потоку $F_v(x_v)$ уздовж дуги.

Задача знаходження розподілу потоків мінімальної вартості може бути сформульована таким чином:

$$F(x)\equiv\sum_{v=1}^{m}F_v x_v\to\min\,, \tag{1}$$

$$Ax=d\,, \tag{2}$$

$$^{-}r\le x\le r^{+}, \tag{3}$$

де $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)^T$ – вектор невідомих дугових потоків, $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)^T$ – вектор споживання у вузлах, $A(n\times m)$ – матриця інциденцій вузли–дуги. Кожен стовпець v цієї матриці відповідає дузі $v=(i,j)$, $i,j\in N$, та містить тільки два ненульових елементи: $+1$ у рядку i та -1 у рядку j.

Виконання співвідношень (2) гарантує задоволення потреби всіх споживачів. Умова сумісності цих рівнянь отримується їх додаванням і є умовою збалансованості системи:

$$\sum_{i=1}^{n}d_i=0\,. \tag{4}$$

Вважатимемо, що функція $F(\cdot)$ є опуклою двічі неперервно диференційовною і $\langle v,F_v''(x_v)v\rangle>0$ для всіх $v\in V, v\ne 0$. За умови існування розв'язку остання умова гарантує його єдиність [4].

Методи лінеаризації та послідовного квадратичного програмування для мережевих задач

Основна процедура процесу обчислень в обох методах – розв'язання послідовності апроксимуючих квадратичних задач.

Якщо x^0 – початкове наближення до розв'язку нелінійної задачі (1)–(3), то для реалізації ітераційного процесу

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k p^k\,,\ 0<\alpha_k\le 1\,, \tag{5}$$

у кожній точці x^k знаходимо напрям зсуву $p^k=p(x^k)\in R^m$ як розв'язок при фіксованому $x=x^k\in R^m$ допоміжної квадратичної задачі:

$$f(p)\equiv\frac{1}{2}\langle p,Hp\rangle+\langle g,p\rangle\to\min\,, \tag{6}$$

$$Ap=\tilde d\,, \tag{7}$$

$$\tilde r^{-}\le p\le\tilde r^{+}\,, \tag{8}$$

де $g = F'(x)$ – градієнт функції $F(x)$, $H = F''(x)$ – матриця її других похідних у методах послідовного квадратичного програмування або одинична матриця у випадку застосування методу лінеаризації, $\tilde{d} = d - Ax$, $\tilde{r}^- = r^- - x$, $\tilde{r}^+ = r^+ - x$.

Припускаємо, що розв'язок допоміжних задач (6)–(8) існує для всіх точок процесу (5).

Критерієм завершення процесу (5) є виконання умови $p(x^k) = 0$.

Якщо вибрати $H = F''(x)$ і формулу для обчислення крокового множника α_k

$$F(x^k + \alpha p^k) \le F(x^k) - \varepsilon\alpha\langle p^k, F''(x^k)p^k\rangle,$$

$$0 < \varepsilon < 1, \tag{9}$$

то виконується така теорема.

Теорема [4]. Нехай цільова функція задачі (1)–(3) $F(x)$ є опуклою двічі неперервно диференційовною функцією, а всі функції обмежень (2), (3) – це лінійні функції, і нехай $\langle p, F''(x)p\rangle \ge \omega||p||^2$, $\omega > 0$. Тоді ітераційний процес алгоритму опуклого програмування (5), в якому допоміжною є задача (6)–(8), а для знаходження кроку використовується формула (9), збігається швидше довільної геометричної прогресії з довільного початкового наближення, що задовольняє обмеження задачі.

Для $H = I$ (випадок методу лінеаризації Б.М. Пшеничного) ми отримуємо формулу для обчислення крокового множника з умови зменшення точної штрафної функції.

Нехай $W(x) = \max\{0, |\langle A_i, x\rangle - d_i|, i = 1,\ldots,n;$ $x_j - r_j^+, r_j^- - x_j, j = 1,\ldots,m\}$, де $A_i \in R^m$ – рядок матриці инциденцій.

$\Phi_U(x) = F(x) + UW(x)$, де $U \ge \sum_{i=1}^{n}|u_i| + \sum_{i=n}^{2m+n} u_i$,

а u_i, $i = 1,\ldots,2m+n$, – двоїсті змінні, що відповідають обмеженням (7), (8) допоміжної задачі, і U, відповідно, – коефіцієнт штрафу.

Кроковий множник α_k обчислюється за формулою

$$\Phi_U(x^k + \alpha p^k) \le \Phi_U(x^k) - \varepsilon\alpha||p^k||^2, \; 0 < \varepsilon < 1.$$

Швидкість збіжності у цьому випадку є звичайною для оптимізаційних методів першого порядку.

Розв'язання допоміжних квадратичних задач

Найбільш трудомісткою обчислювальною процедурою наведених вище алгоритмів є розв'язання задачі квадратичного програмування (6)–(8). Очевидно, що від ефективності її розв'язання багато в чому залежить ефективність розв'язання вихідної задачі (1)–(3). Алгоритм розв'язання допоміжних підзадач (6)–(8) повинен мати гарантовану збіжність та числову стійкість, інакше важко очікувати на збіжність процесу в цілому.

Для розв'язання задачі (6)–(8) застосовувався метод двоїстого активного набору, який забезпечує розв'язок задачі за скінченну кількість кроків [6]. Загальна ідея методу полягає у впорядкованому переборі граней допустимої множини та мінімізації квадратичної функції на цих гранях. Розпочинаємо з точки безумовного мінімуму функції $f(p)$, яка зазвичай не є допустимою для задачі з обмеженнями, та, збільшуючи значення цільової функції, поступово задовольняємо всі обмеження задачі (6)–(8). Для цього вибираємо обмеження, яке не задовольняється в поточній точці, та знаходимо мінімум на грані, що визначається цим обмеженням. Або знайдений мінімум на грані є розв'язком задачі (6)–(8), якщо всі обмеження задовольняються, або можливий перехід на деяку нову грань, після чого процедура пошуку повторюється.

В алгоритмі для знаходження мінімуму на грані потрібно розв'язати систему рівнянь, що описує необхідні умови задачі (6)–(8) при частині обмежень, які виконуються як рівності. Для розв'язання таких систем застосовувалися матричні перетворення, за допомогою яких матриці зводились до трикутного вигляду (*QR*-факторизація та повороти Гівенса) [7]. Це дало змогу, на відміну від звичайних процедур виключення Гаусса, побудувати числово стійкі методи розв'язання систем.

Метод одночасно обчислює прямі та двоїсті змінні, що є важливим для вибору параметра штрафу *U*, який застосовується для обчислення крокового множника в основному ітераційному процесі (5).

Приклади задач і обчислювальні експерименти

Проведемо низку обчислювальних експериментів. Як тестовий приклад проаналізуємо задачу розрахунку газотранспортних мереж, що розглядалась у статті [8] і розв'язувалася методом покоординатного спуску.

Необхідно мінімізувати функцію

$$F_1 = \sum_{(i,j)\in V} l_{ij} | x_{ij} |^{1+\alpha}, \ 0 < \alpha < 1, \qquad (14)$$

за обмежень

$$\sum_{j:(j,i)\in V} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in V} x_{ji} = d_i, i \in N, \qquad (15)$$

$$r_{ij}^{-} \le x_{ij} \le r_{ij}^{+}, \ (i,j) \in V, \qquad (16)$$

де l_{ij} — це вартість транспортування потоку x_{ij} уздовж ділянки $(i,j)\in V$, зокрема її довжина.

Будемо вважати, що напрямки руху потоків у мережі є рівноможливими, тобто $|r_{ij}^{-}| = |r_{ij}^{+}|$ і ця величина визначає пропускну здатність ділянки $(i,j)\in V$. Це означає, що ми не тільки обчислюємо величину потоку, але й визначаємо напрямок його протікання.

Будемо розв'язувати цю задачу методом лінеаризації та методом узагальненого зведеного градієнта (УЗГ) з пакета Solver, Frontline Systems Inc.

Розглянемо також можливі модифікації цієї моделі, що дають можливість значно розширити клас розв'язуваних задач.

Задача 1. Відомі замовлення споживачів та продуктивність джерел постачання продукту.

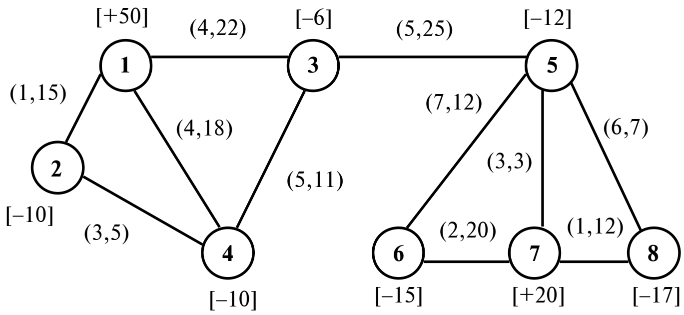


Рис. 1. Вихідні дані

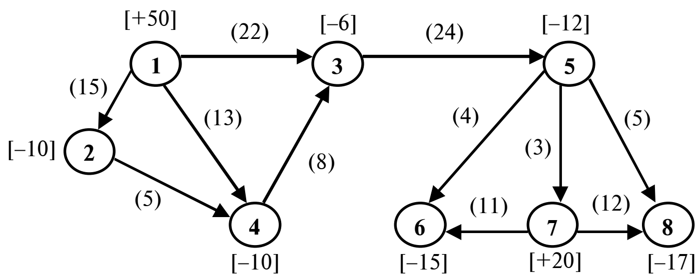


Рис. 2. Оптимальний розподіл потоків у мережі з фіксованими джерелами

Необхідно запропонувати план поставок продукту з мінімальними затратами на доставку.

На рис. 1 задано конфігурацію мережі, довжину та пропускну здатність кожної ділянки, споживання у вершинах, розміщення джерел постачання та фіксований обсяг надходження продукту з цих джерел.

У квадратних дужках на рис. 1 позначені обсяги постачання (+) / споживання (–) у відповідному вузлі. Перше з чисел у круглих дужках уздовж дуги позначає довжину, а друге — пропускну здатність дуги.

Для розв'язання задачі авторами виконано програмну реалізацію методу лінеаризації. Для порівняння проведено обчислення за стандартною програмою методом УЗГ. Обчислення проводились для значення $\alpha = 0{,}5$ у цільовій функції (14). Обома методами одержали ідентичний оптимальний план поставок продукту $x^* = (15; 22; 13; 5; -8; 24; 4; 3; 5; -11; 12)^T$.

Кількість ітерацій при розрахунках методом лінеаризації виявилася у 7 разів меншою, ніж при застосуванні стандартного пакета з методом того ж порядку.

На рис. 2 оптимальний розподіл потоків відображено на графі.

Задача 2. У вузлах графа задаються функції споживання (замовлення споживачів та план постачання продукту), причому подача продукту з різних джерел може бути або константами (детерміновані джерела), або змінними (недетерміновані джерела). Потрібно визначити такий план розподілу потоків уздовж мережі, який за рахунок можливого перерозподілу навантаження недетермінованих джерел задовольнить споживачів із найменшими загальними витратами на перевезення.

Будемо вважати, що виділена деяка підмножина вершин $\bar{N} \subseteq N$, у яких величина d_i не є фіксованою. Таким чином, мінімізація функції (14) відбувається по всіх $x_{ij}, (i,j)\in V$, $d_i, i\in \bar{N}$, зв'язаних обмеженнями (15), (16), за умови виконання (4).

Розглянемо мережу задачі 1, у якій постачання продукту в систему у вузлах 1 і 7 оптимізується разом із потоковими змінними. Споживання в інших вузлах залишається фіксованим. В оптимізаційній задачі (14)–(16) додаються ще дві змінні d_1 та d_7.

Як і для попередньої задачі, для задачі 2 двома методами були отримані аналогічні результати: $x^* = (14,5;\ 14,1;\ 6,5;\ 4,5;\ -0,9;\ 9;\ -5;\ -3;\ 5;\ -20;\ 12)^T$, $d_1^* = d_7^* = 35$.

За результатами розрахунків величина загальних затрат на транспортування речовини у задачі 1 становить 431 од., а у задачі 2 –285,7 од. Виграш у ефективності становить майже третину від попередніх витрат, отриманих при фіксованих постачаннях продукту з джерел.

Задача 3. Розглянемо випадок, коли важливо, щоб подача продукту з певних джерел не перевищувала деяких наперед заданих меж. Розрахуємо задачу функціонування мережі за умови мінімізації експлуатаційних витрат та обмеження подачі в мережу продукту з певних джерел.

До цієї постановки задачі зводиться проблема розподілу ресурсів зі збереженням продукту у резервуарах тимчасового зберігання (сховищах).

Технологічні обмеження на продуктивність джерел (сховищ) можемо сформулювати у вигляді простих двосторонніх обмежень

$$d_i^- \leq\ \leq d_i \leq d_i^+,\ i \in \bar{N}.$$

Для мережі (задачі 1, 2) будемо задавати двосторонні обмеження на постачання у вузлах 1 і 7, розподіл якого оптимізується разом із потоковими змінними.

На рис. 3 показані знайдені значення вартості перевезень для обсягів постачань із діапазонів $d_1 \in [35;51]$, $d_7 \in [19;35]$. На вісях діаграми позначені обсяги постачань d_1 і d_7. Діаметр кульки відображає загальну вартість перевезень у мережі, виноски на діаграмі містять числові значення d_1, d_7, F_1 відповідно. В математичних моделях, у яких або $d_7 \in]0;19[\cup]35;\infty[$, $d_1 > 0$, або $d_1 \in]0;35[\cup]61;\infty[$, $d_7 > 0$, розв'язок не був знайдений (для вказаних значень d_1, d_7 система обмежень не сумісна).

Задача 4. Процес створення більш точних і одночасно прийнятних за складністю моделей і методів логічно призводить до участі кваліфікованих експертів, зокрема для послідовного уточнення прийнятих рішень. Якщо в процесі розв'язання задачі експерти визначили різний бажаний внесок недетермінованих джерел подачі газу в процес задоволення споживачів і він становить h_i для вузлів $i \in \bar{N}$, то врахування побажань експертів здійснюємо введенням штрафу за великі ухилення від бажаних значень у цільову функцію у вигляді квадратичного додатка $\frac{1}{2}\sum_{i\in\bar{N}}(d_i - h_i)^2$.

На діаграмі (рис. 4) зображені знайдені значення постачання d_1, d_7 та квадрат їх відхилення від значень, заданих експертами. Значення відхилення відкладені по допоміжній вісі ординат, а обчислені значення постачань – по основній. По вісі категорій зображені бажані значення постачань, що задають експерти, і таблиця даних, що містить обчислені значення.

Результати експериментів (рис. 4, рис. 5) показали, що у певних інтервалах коливань

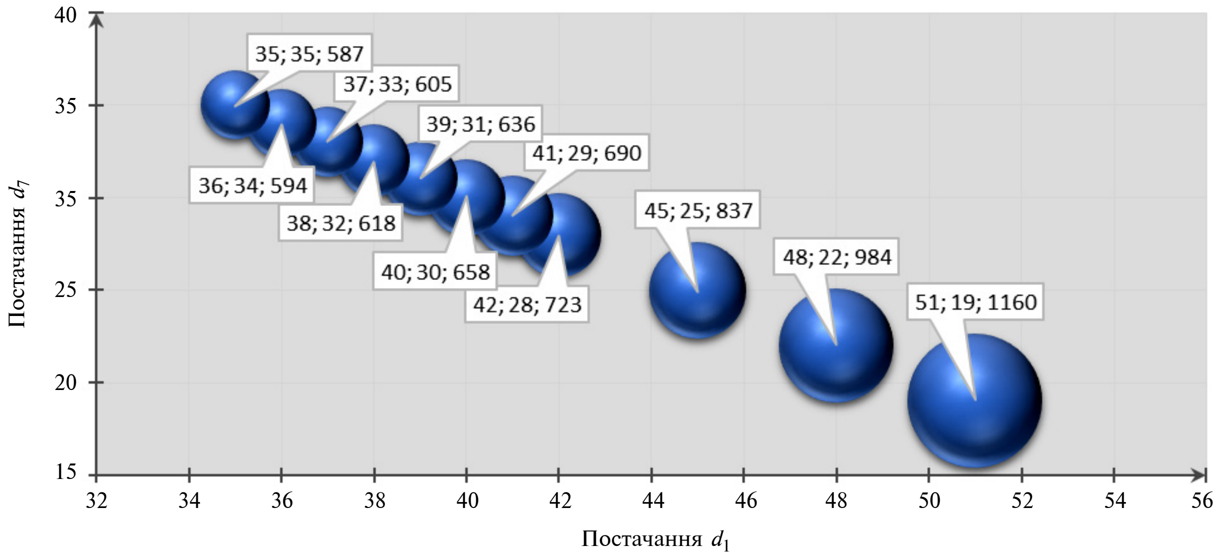
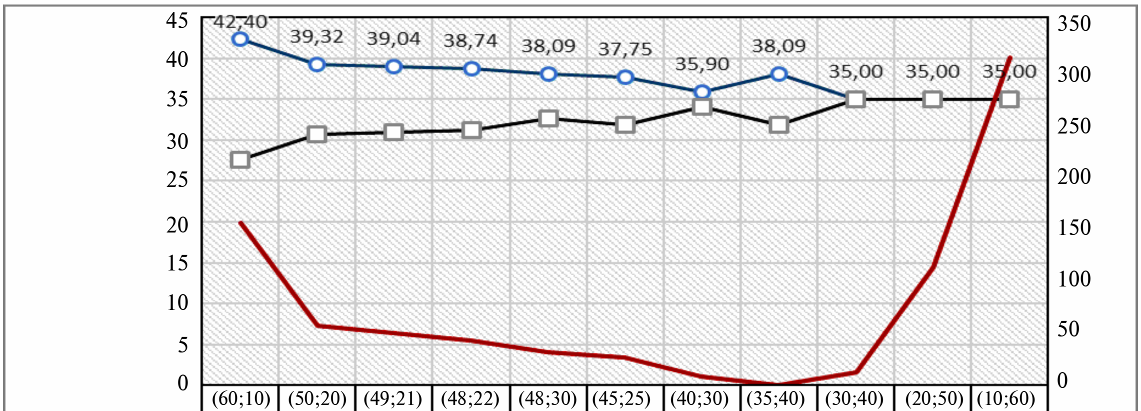
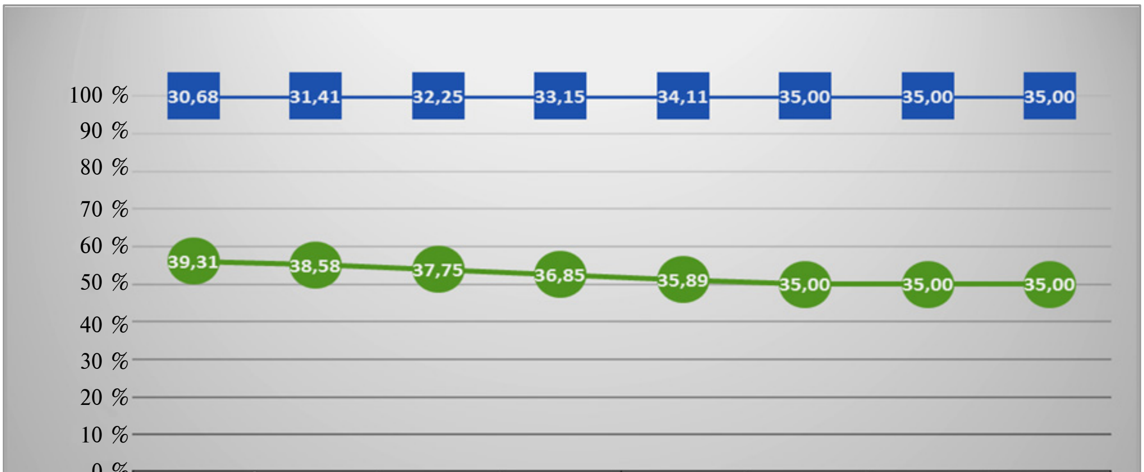


Рис. 3. Залежність загальної вартості перевезень від розподілу постачання



	(60;10)	(50;20)	(49;21)	(48;22)	(48;30)	(45;25)	(40;30)	(35;40)	(30;40)	(20;50)	(10;60)
d_1	42,40	39,32	39,04	38,74	38,09	37,75	35,90	38,09	35,00	35,00	35,00
d_7	27,60	30,68	30,96	31,26	32,61	31,91	34,10	31,91	35,00	35,00	35,00
Відхилення	154,91	57,06	49,60	42,87	31,28	26,31	8,42	0,00	12,50	112,50	312,50

Рис. 4. Графік відхилень оптимального плану від бажаних значень



	(60;30)	(55;30)	(50;30)	(45;30)	(40;30)	(35;30)	(32;30)	(30;40)
d_7	30,68	31,41	32,25	33,15	34,11	35,00	35,00	35,00
d_1	39,31	38,58	37,75	36,85	35,89	35,00	35,00	35,00

Рис. 5. Оптимальні значення постачання d_1, d_7 за обмежень $30 \le d_1 \le 100$, $10 \le d_7 \le 70$

$32{,}5 \le d_7 \le 35$, $35 \le d_1 \le 40$ можна корелювати оптимальний план постачань з побажаннями експертів.

Висновки

Запропоновані моделі та алгоритми можуть слугувати як інструментарій для системного дослідження розподілених систем різної природи, зокрема систем енергетики. Обчислювальні процедури базуються на ідеях методів лінеаризації та ітераційного квадратичного програмування, що добре зарекомендували себе при розв'язанні широкого кола прикладних проблем.

Показано, що побудовані алгоритми можуть бути застосовані не тільки для розв'язання базової класичної задачі розподілу потоків, але й низки близьких за структурою, але різних за змістом задач, що виникають при дослідженнях мережевих систем. Числові експерименти підтвердили ефективність розроблених алгоритмів та їх перевагу над стандартними оптимізаційними підпрограмами при розв'язанні цих класів задач.

Результати розрахунків тестових мережевих задач із застосуванням запропонованого в роботі алгоритму за методом лінеаризації Б.М. Пшеничного продемонстрували зменшення кількості ітерацій у процедурах першого порядку порівняно зі стандартним пакетом Solver у 5—7 разів.

Подальші дослідження мають бути зосереджені на аналізі методів більш високого порядку з прискореною швидкістю збіжності.

Список літератури

1. *M.C. Biggs,* "Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming", Towards Global Optimization, L.C.W. Dixon and G.P. Szergo, Eds. North-Holland, 1975, pp. 341—349.
2. *S.P. Han,* "A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming", J. Optimization Theory and Applications, vol. 22, p. 297, 1977.
3. *M.J.D. Powell,* Variable Metric Methods for Constrained Optimization. Mathematical Programming: The State of the Art, A. Bachem et al., Eds. Springer Verlag, 1983, pp. 288—311.
4. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. — М.: Наука, 1983. — 136 с.
5. *Кірік О.Є.* Алгоритми лінеаризації та спряжених градієнтів для нелінійних задач розподілу потоків // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2007. — № 3. — С. 67—73.
6. *D. Goldfarb and A. Idnani,* "A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic problem", Math. Progr., vol. 27, no. 1, pp. 1—33, 1983.
7. *Александрова В.М., Соболенко Л.А.* Эффективная реализация ускоренного метода решения вариационных неравенств // Системні дослідження та інформ. технології. — 2014. — № 3. — С. 119—129.
8. *Кірік О.Є.* Нелінійні задачі розподілу потоків у мережах з фіксованими та вільними вузловими параметрами // Там же. — 2002. — № 4. — С. 106—119.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
3 лютого 2014 року