УДК 519.21

Б.М. Жураковський

АСИМПТОТИЧНА ЄДИНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

In the paper the nonlinear regression model with continuous time and random noise, which is a local functional of strongly dependent stationary Gaussian random process, is considered. Sufficient conditions of asymptotic uniqueness of the least squares estimator of regression function parameters are obtained. This result is applied to the least squares estimator of amplitude and angular frequencies of harmonic oscillations sum observed on the background of given random noise. To obtain the main result limit theorems of random processes, weak convergence of a family of measures to the spectral measure of a regression function, etc were used. The novelty, compared with the known results in the theory of periodogram estimator in observation models on weakly dependent noise, is assuming that the random noise is a local functional of Gaussian strongly dependent stationary process. The result can be used in the proof of the asymptotic normality of the least squares estimator of nonlinear regression model parameters with the help of Brower fixed point theorem.

Keywords: least square estimator, asymptotic uniqueness, strong dependence, hidden periodicities, nonlinear regression.

Вступ

Виявлення прихованих періодичностей – це задача, яка має довгу історію, розпочату Ж. Лагранжем у XVIII ст. В сучасному статистичному розумінні виявлення прихованих періодичностей – це оцінювання невідомих амплітуд і кутових частот, взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні випадкового шуму, який маскує ці коливання.

Досить часто з'являються нові публікації на тему виявлення прихованих періодичностей, які стосуються різноманітних галузей знань, зокрема астрономії [1], фізики та геофізики [2], біології [3], кліматології [4] тощо.

У статті розглядається нелінійна модель регресії з неперервним часом і випадковим шумом, який є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу із сильною залежністю. Як оцінка невідомих параметрів функції регресії вибирається оцінка найменших квадратів (о.н.к.). Серед бажаних властивостей о.н.к. важливу роль відіграє її асимптотична єдиність, яка полягає в тому, що при необмеженому зростанні часу спостереження о.н.к. єдина з імовірністю, що прямує до одиниці. Цей факт може бути використаним у доведені асимптотичної нормальності о.н.к. при застосуванні теореми Брауера про нерухому точку [5].

Постановка задачі

Мета роботи полягає в наведенні достатніх умов асимптотичної єдиності о.н.к. загальної нелінійної моделі регресії з неперервним часом і випадковим шумом, що є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу із сильною залежністю.

Вихідні дані

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \in [0,T], \qquad (1)$$

де $g(\cdot,\cdot):[0;+\infty)\times\Theta^c \to \mathbb{R}^1$ – неперервна функція, Θ^c – замикання в $\mathbb{R}^q$ відкритої множини $\Theta \subset \mathbb{R}^q$, а відносно шуму $\varepsilon(t)$ припустимо, що

А1. $\varepsilon(t)$, $t \in R^1$, є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t))$, $G(x)$, $x \in R^1$, – борелівська функція, причому $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^4(0) < \infty$.

А2. $\xi(t)$, $t \in R^1$, є дійсним неперервним у середньому квадратичному вимірним стаціонарним гауссовим процесом із сильною залежністю, $E\xi(0) = 0$.

Припустимо також, що виконується одна з двох умов:

А3. Коваріаційна функція (к.ф.) процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$E\xi(t)\xi(0) = B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha},\ \alpha \in (0,1),$$

$$E\xi^2(0) = B(0) = 1,$$

де $L(t)$, $t \ge 0$, – неспадна повільно змінна на нескінченності функція.

A4. К.ф. процесу має вигляд

$$B(t)=\frac{\cos\psi t}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}},\ \alpha\in(0,1),\ \psi\in[0,\infty).$$

Будемо розглядати о.н.к. невідомого параметра $\theta\in\Theta$, тобто випадковий вектор $\widehat{\theta}_T\in\Theta^c$ такий, що мінімізує функціонал

$$Q_T(\theta)=T^{-1}\int_0^T[X(t)-g(t,\theta)]^2dt.$$

Зробимо деякі припущення щодо функції регресії $g(t,\tau)$. Нехай $g(t,\tau)$ двічі неперервно диференційовна за $\tau\in\Theta^c$.

Позначимо

$$g_i(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau_i}g(t,\tau),\ g_{il}(t,\tau)=\frac{\partial^2}{\partial\tau_i\partial\tau_l}g(t,\tau),\ i,l=\overline{1,q},$$

$$d_T^2=\mathrm{diag}(d_{iT}(\theta))_{i=1}^q,$$

де

$$d_{iT}^2(\theta)=\int_0^T g_i^2(t,\theta)dt,\ \lim T^{-1}d_{iT}^2(\theta)>0,$$

$$T\to\infty,\ i=\overline{1,q}.$$

Ці границі можуть дорівнювати, зокрема, нескінченності. Нехай також

$$d_{il,T}^2(\theta)=\int_0^T g_{il}^2(t,\theta)dt,\ \theta\in\Theta,\ i,l=\overline{1,q}.$$

Розглянемо нормовану о.н.к.:

$$\widehat{u}_T=\widehat{u}_T(\theta)=d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T-\theta). \qquad (2)$$

Зробимо заміну змінних $u=d_T(\theta)(\tau-\theta)$, яка відповідає нормуванню (2), у функції регресії та її похідних, тобто

$$g(t,\tau)=g(t,\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h(t,u),$$

$$g_i(t,\tau)=g_i(t,\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h_i(t,u),\quad i=\overline{1,q},$$

$$g_{il}(t,\tau)=g_{il}(t,\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h_{il}(t,u),\ i,l=\overline{1,q}.$$

Позначимо $V(R)=\{u\in\mathbb{R}^q: u<R\}$. Додатні константи будемо позначати k. Припускатимемо, що для $R\ge 0$, усіх достатньо великих T $(T>T_0)$ та істинного значення параметра $\theta\in\Theta$ виконується умова

B1.

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{u\in V^c(R)}\frac{|h_i(t,u)|}{d_{iT}(\theta)}\le k^i(R)\cdot T^{\frac{-1}{2}},\ i=\overline{1,q}; \qquad (3)$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta)}\le k^{il}(R)\cdot T^{\frac{-1}{2}},\ i,l=\overline{1,q}; \qquad (4)$$

$$\frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)\theta d_{lT}(\theta)}\le \tilde{k}^{il}(R)\cdot T^{\frac{-1}{2}},\ i,l=\overline{1,q}. \qquad (5)$$

Будемо також використовувати позначення

$$H(t;u_1,u_2)=h(t,u_1)-h(t,u_2),$$

$$H_i(t;u_1,u_2)=h_i(t,u_1)-h_i(t,u_2),\ i=\overline{1,q}.$$

Введемо вектор

$$\Psi_T(u)=(\Psi_T^i(u))_{i=1}^q,$$

$$\Psi_T^i(u)=\int_0^T\varepsilon(t)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}dt+\int_0^T H(t;0,u)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}dt,\quad i=\overline{1,q}. \qquad (6)$$

Вектор $\Psi_T(u)$ визначений для $u\in U_T^c(\theta)$, $U_T(\theta)=d_T(\theta)(\Theta-\theta)$.

Зауважимо, що, за нашим припущенням, множина $U_T(\theta)$ розширюється до $\mathbb{R}^q$ при $T\to\infty$. Тоді для будь-якого $R>0$, $V^c(R)\subset\subset U_T(\theta)$ для $T>T_0$.

Нормована о.н.к. $\widehat{u}_T$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u)=0. \qquad (7)$$

Запишемо

$$J_T(\theta)=(J_{il,T}(\theta))_{i,l=1}^q,\ J_{il,T}(\theta)=$$

$$=d_{iT}^{-1}(\theta)d_{lT}^{-1}(\theta)\int_0^T g_i(t,\theta)g_l(t,\theta)dt,$$

$\lambda_{\min}(A)\ (\lambda_{\max}(A))$ — найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

B2. Для деякого $\lambda_*>0$ при $T>T_0$

$$\lambda_{\min}(J_T(\theta))\ge\lambda_*.$$

Розглянемо нормовану о.н.к.

$$\widehat{w}_T=\widehat{w}_T(\theta)=T^{\frac{-1}{2}}d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T-\theta),$$

якій відповідає заміна змінних $w = T^{\frac{-1}{2}} d_T(\theta)(\tau - \theta)$ у функції регресії та її похідних.

Позначимо

$$g(t,\tau) = g\left(t, \theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right) = f(t,w),$$

$$g_i(t,\tau) = g_i\left(t, \theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right) = f_i(t,w),\ i = \overline{1,q},$$

$$g_{il}(t,\tau) = g_{il}\left(t, \theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right) = f_{il}(t,w),\ i,l = \overline{1,q}.$$

$$F(t; w_1, w_2) = f(t,w_1) - f(t,w_2),$$

$$F_i(t; w_1, w_2) = f_i(t,w_1) - f_i(t,w_2),\ i = \overline{1,q},$$

$$F_{il}(t; w_1, w_2) = f_{il}(t,w_1) - f_{il}(t,w_2),\ i,l = \overline{1,q}.$$

$$\Phi_{il,T}(w,0) = \int_0^T F_{il}^2(t; w, 0)\, dt,$$

Введемо також умову

B3. Для деякого $r_0 > 0$

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{w \in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t,w)|}{d_{iT}(\theta)} \le \hat{k}^i(r_0) \cdot T^{\frac{-1}{2}},\ i = \overline{1,q}; \quad (8)$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \sup_{w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t,w)|}{d_{il,T}(\theta)} \le \hat{k}^{il}(r_0) \cdot T^{\frac{-1}{2}},\ i,l = \overline{1,q}; \quad (9)$$

$$\sup_{w \in V^c(r_0)} T d_{iT}^{-2}(\theta) d_{lT}^{-2}(\theta) \Phi_{il,T}(w,0) w^{-2} \le \hat{k}_{il}(r_0), \quad (10)$$
$$i,l = \overline{1,q}.$$

Зауважимо, що нерівності (8) і (9) є модифікаціями відповідно нерівностей (3) і (4) з умови B1.

Розглянемо функціонал

$$\frac{1}{2T}\int_0^T [X(t) - f(t,w)]^2 dt = \frac{1}{2} Q_T\left(\theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right) \quad (11)$$

і введемо вектор

$$\mathcal{M}_T(w) = (\mathcal{M}_T^i(w))_{i=1}^q =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{1}{2} Q_T(\theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right)\right)_{i=1}^q =$$

$$= \left(T^{\frac{-1}{2}} \int_0^T [X(t) - f(t,w)] \cdot \frac{-f_i(t,w)}{d_{iT}(\theta)} dt\right)_{i=1}^q .$$

Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \quad (12)$$

Зауважимо, що якщо нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (12), тоді $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (7).

Основний результат

Для описаної вище моделі має місце такий результат.

Теорема 4. Нехай виконуються умови A1, A2, A3 або A4, B1—B3, тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з імовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (12).

Доведення. Розглянемо загальний елемент гесіана $\mathcal{H}_T(w) = (\mathcal{H}_T^{il}(w))_{i,l=1}^q$:

$$\mathcal{H}_T^{il}(w) = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l}\left(\frac{1}{2T} Q_T(\theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w\right) =$$

$$= T^{-1} \int_0^T \left([X(t) - f(t,w)] \cdot \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} T + \right.$$

$$\left. + \frac{f_i(t,w) f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} T\right) dt =$$

$$= \int_0^T [f(t,0) + \varepsilon(t) - f(t,w)] \cdot \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{f_i(t,w) f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt =$$

$$= \int_0^T F(t; w, 0) \cdot \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt - \int_0^T \varepsilon(t) \frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{(f_i(t,w) - f_i(t,0) + f_i(t,0)) \cdot (f_l(t,w) - f_l(t,0) + f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt = I_1(w) +$$

$$+ I_2(w) + \int_0^T \frac{(f_i(t,w) - f_i(t,0)) \cdot (f_l(t,w) - f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt +$$

$$+\int_0^T \frac{(f_i(t,w)-f_i(t,0))\cdot f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt+$$

$$+\int_0^T \frac{(f_l(t,w)-f_l(t,0))\cdot f_i(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt+\int_0^T \frac{f_i(t,0)f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt=$$

$$=I_1(w)+I_2(w)+I_3(w)+I_4(w)+I_5(w)+J_{il,T}(\theta),\quad i,l=\overline{1,q}. \tag{13}$$

Беручи до уваги нерівність

$$|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w))-\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))|\le$$
$$\le q\cdot\max_{1\le i,l\le q}|\mathcal{H}_{il}(w)-J_{il,T}(\theta^0)|$$

(див. [6, с. 103]), матимемо

$$\max_{1\le i,l\le q}|\mathcal{H}_{il}(w)-J_{il,T}(\theta^0)|\le\sum_{m=1}^{5}\max_{1\le i,l\le q}|I_m(w)|. \tag{14}$$

Використовуючи умови теореми, формулу скінченних приростів і нерівність Коші–Буняковського, отримуємо для $w\le r_0$

$$|I_1(w)|=\left|\int_0^T F(t;w,0)\cdot\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|\le$$

$$\le T\sup_{t\in[0,T]}\left|F(t;w,0)\cdot\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right|\le$$

$$\le T\cdot\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot T^{-1}\cdot\sup_{t\in[0,T]}|F(t;w,0)|\le$$

$$\le\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot\sup_{t\in[0,T]}|f(t,w)-f(t,0)|=$$

$$=\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot\sup_{t\in[0,T]}\left|T^{\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{q}\frac{f_l(t,w_T^*)}{d_{lT}(\theta)}w_l\right|\le$$

$$\le\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot T^{\frac{1}{2}}\cdot\sup_{t\in[0,T]}\left(\sum_{l=1}^{q}\left(\frac{f_l(t,w_T^*)}{d_{lT}(\theta)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot w\le$$

$$\le\hat{k}\cdot\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot w,\quad \hat{k}=(\hat{k}_1,\dots,\hat{k}_q). \tag{15}$$

Розглянемо далі

$$|I_2(w)|=\left|\int_0^T\varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^T\varepsilon(t)\frac{F_{il}(t;w,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt+\int_0^T\varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|\le$$

$$\le|I_6(w)|+|I_7(w)|. \tag{16}$$

Тепер із умови В3, отримуємо

$$|I_6(w)|=\left|\int_0^T\varepsilon(t)\frac{F_{il}(t;w,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|\le$$

$$\le\left(T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(T\frac{\Phi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta)d_{lT}^2(\theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left(T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\hat{k}_{il}^{\frac{1}{2}}\cdot w. \tag{17}$$

Маємо далі

$$\left(T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(T^{-1}\int_0^T(\varepsilon^2(t)-E\varepsilon^2(0))dt+E\varepsilon^2(0)\right)^{\frac{1}{2}}=(\xi_T+E\varepsilon^2(0))^{\frac{1}{2}},$$

$$E\xi_T^2=T^{-2}\int_0^T\int_0^T E\varepsilon^2(t)\varepsilon^2(s)-(E\varepsilon^2(0))^2)\,dt\,ds.$$

Доведемо, що

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T E\varepsilon^2(t)\varepsilon^2(s)\,dt\,ds\to(E\varepsilon^2(0))^2,\ T\to\infty. \tag{18}$$

За умови А1 функцію $G^2(x)$ можна розкласти в ряд у гільбертовому просторі $L_2(R^q,\varphi(x)dx)$ за поліномами Чебишова–Ерміта:

$$G^2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_m}{m!}H_m(x),$$

$$d_m=\int_{-\infty}^{+\infty}G^2(x)H_m(x)\varphi(x)dx,\ m\ge0.$$

Таким чином,

$$E\varepsilon^2(t)\varepsilon^2(s)-(E\varepsilon^2(0))^2=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_m^2}{m!}B^m(t-s)-(E\varepsilon^2(0))^2=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_m^2}{m!}B^m(t-s)\le|B(t-s)|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_m^2}{m!}. \tag{19}$$

Оскільки

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d_m^2}{m!}=EG^4(\xi(0))-(EG^2(\xi(0)))^2=$$

$$=DG^2(\xi(0))<\infty, \qquad (20)$$

то із (19), (20) та того факту, що

$$|E\varepsilon(t)\varepsilon(s)|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k^2}{k!}B^k(t-s)\le EG^2(\xi(0))\,|B(t-s)|,$$

маємо при $T\to\infty$ (див., наприклад, [7])

$$E\xi_T^2\le DG^2(\xi(0))T^{-2}\int_0^T\int_0^T|B(t-s)|dtds\to 0.$$

Таким чином

$$\xi_T=o_p^{(1)}(1), \qquad (21)$$

де $o_p^{(1)}(1)\xrightarrow{P}0,\ T\to\infty$.

Далі, враховуючи умови B3, отримуємо

$$E|I_7(w)|^2=$$

$$=E\left|\int_0^T\varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|^2\le\int_0^T\int_0^T|E\varepsilon(t)\varepsilon(s)|dtds\times$$

$$\times\left(\sup_{t\in[0,T]}\frac{|f_{il}(t,0)|}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right)^2\le$$

$$\le(\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il})^2\cdot DG(\xi(0))\cdot T^{-2}\int_0^T\int_0^T|B(t-s)|dtds.$$

Таким чином,

$$|I_7(w)|=o_p^{(2)}(1)\xrightarrow{P}0,\ T\to\infty. \qquad (22)$$

Маємо далі

$$|I_3(w)|=\left|\int_0^T\frac{(f_i(t,w)-f_i(t,0))\cdot(f_l(t,w)-f_l(t,0))}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|\le$$

$$\le T\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\int_0^T\frac{|f_{ij}(t,w_T^*)|}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\cdot\frac{|f_{ls}(t,w_T^*)|}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\cdot|w_j|\cdot|w_s|\le$$

$$\le T\sum_{j=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}\int_0^T\frac{|f_{ij}(t,w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\times$$

$$\times\frac{|f_{ls}(t,w_T^*)|}{d_{ls,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ls,T}(\theta)}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\cdot|w_j|\cdot|w_s|\le$$

$$\le\left(\sum_{s=1}^{q}(\hat{k}^{ls}\cdot\tilde{k}^{ls})^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{ij}\cdot\tilde{k}^{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}w^2. \qquad (23)$$

Аналогічно, з умов B1 та B3 випливає, що

$$|I_4(w)|=\left|\int_0^T\frac{(f_i(t,w)-f_i(t,0))\cdot f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt\right|\le$$

$$\le T^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{q}|w_j|\int_0^T\frac{|f_{ij}(t,w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\cdot\frac{|f_l(t,0)|}{d_{lT}(\theta)}dt\le$$

$$\le T^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{q}|w_j|\cdot\sup_{t\in[0,T]}\frac{|f_{ij}(t,w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\times$$

$$\times\frac{|f_l(t,0)|}{d_{lT}(\theta)}\le\hat{k}^{l}\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{ij}\cdot\tilde{k}^{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot w. \qquad (24)$$

Так само для $I_5(w)$ отримуємо

$$|I_5(w)|\le\hat{k}^{i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{lj}\cdot\tilde{k}^{lj})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot w.$$

Таким чином, враховуючи (13)–(25), бачимо, що

$$|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w))-\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))|\le$$

$$\le q\max_{1\le i,l\le q}\Bigg(\hat{k}\cdot\hat{k}^{il}\cdot\tilde{k}^{il}\cdot w+(o_p^{(1)}(1)+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(\hat{k}_{il})\frac{1}{2}\cdot w+$$

$$+o_p^{(2)}(1)+\left(\sum_{s=1}^{q}(\hat{k}^{ls}\cdot\tilde{k}^{ls})^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{ij}\cdot\tilde{k}^{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}w^2+$$

$$+\hat{k}^{l}\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{ij}\cdot\tilde{k}^{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot w+$$

$$+\hat{k}^{i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{q}(\hat{k}^{lj}\cdot\tilde{k}^{lj})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot w\Bigg). \qquad (26)$$

Підставляючи в (26) нормовану о.н.к. $\hat{w}_T$, та враховуючи, що за умови B2 $J_T(\theta^0)$ – додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))\ge\lambda_*$, для деякого $r>0$ розглянемо подію

$$\{|o_p^{(1)}(1)| \le r, |o_p^{(2)}(1)| \le r, \widehat{w}_T \le r\} \subset$$

$$\subset \left\{|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\widehat{w}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \le \frac{\lambda_*}{2}\right\} =$$

$$= \left\{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \le \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\widehat{w}_T)) \le \right.$$

$$\left. \le \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\widehat{w}_T)) \ge \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\widehat{w}_T)) \ge \frac{\lambda_*}{2}\right\}.$$

Далі, позначивши

$$\{|o_p^{(1)}(1)| \le r\} \cap \{|o_p^{(2)}(1)| \le r\} \cap \{\widehat{w}_T \le r\} =$$

$$= \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3,$$

маємо

$$P\{\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3}\} =$$

$$= P\{\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_3\} \le P\{\bar{\Omega}_1\} + P\{\bar{\Omega}_2\} + P\{\bar{\Omega}_3\} =$$

$$= P\{|o_p^{(1)}(1)| > r\} + P\{|o_p^{(2)}(1)| > r\} + P\{\widehat{w}_T > r\}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$ маємо $P\{|o_p^{(1)}(1)| > r\} \le \frac{\varepsilon}{3}$ і $P\{|o_p^{(2)}(1)| > r\} \le \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді якщо для $T > T_0$ $P\{\widehat{w}_T > r\} \le \frac{\varepsilon}{3}$, то

$$P\{|o_p^{(1)}(1)| > r\} + P\{|o_p^{(2)}(1)| > r\} + P\{\widehat{w}_T > r\} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а отже, для $T > T_0$

$$P\{\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3\} > 1 - \varepsilon.$$

Це означає, що нормована о.н.к. $\widehat{w}_T$ з імовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (12), оскільки матриця $\mathcal{H}_T(\widehat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (11) має єдиний екстремум (мінімум) у точці $\widehat{w}_T$. Теорему 4 доведено.

Покажемо, що тригонометрична модель регресії вигляду

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} (A_k^0 \cos\varphi_k^0 t + B_k^0 \sin\varphi_k^0 t), \qquad (27)$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \ldots, \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) =$$

$$= (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, \ldots, A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0)$$

задовольняє умови B1—B3.

Висновки

У роботі отримано достатні умови асимптотичної єдиності о.н.к. параметрів нелінійної моделі регресії з неперервним часом і випадковим шумом, який є локальним функціоналом від гауссового стаціонарного сильно залежного процесу. Асимптотична єдиність є важливою властивістю оцінки, що дає можливість довести асимптотичну нормальність о.н.к. з використанням теореми Брауера про нерухому точку. Показано, що для тригонометричної моделі регресії, яка виникає при розв'язуванні задачі про виявлення прихованих періодичностей, о.н.к. амплітуд і кутових частот суми гармонічних коливань є асимптотично єдиною.

Подальшим напрямом досліджень може бути отримання асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії.

Список літератури

1. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* "An Extended Matched Filtering Methods to Detect Periodicities in a Rough Grating for Extremely Large Roughness", Bull. Astronomical Soc. India, vol. 31, pp. 457–459, 2003.
2. *S. Chatterjee and V.C. Vani,* "Scattering of light by a periodic structure in the presence of randomness. V. Detection of successive peaks in a periodic structure", Applied Optics, vol. 45, pp. 8939–8944, 2006.
3. *H. Arsham,* "A test sensitive to extreme hidden periodicities, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment", vol. 11, no. 4, pp. 323–330, 1997.
4. *J. Malisic et al.,* "Application of some statistical tests for hidden periodicity in the Serbian annual precipitation sums", Hungarian Meteorolog. Service, vol. 103, no. 4, pp. 237–247, 1999.
5. *Гончаренко Ю.В., Ляшко С.И.* Теорема Брауэра. – К.: КИЙ, 2000. – 48 с.
6. *J.H. Wilkinson,* The algebraic eigenvalue problem. Oxford: Clarendon Press, 1965.
7. *A.V. Ivanov and I.V. Orlovsky,* " L_p Estimates in Nonlinear Regression with Long Range Dependence", Theory

of Stochastic Processes, vol. 7 (23), no. 3-4, pp. 38–39, 2002.

8. *Иванов О.В.* Конзистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових суми гармонійних коливань у моделях з сильною залежністю // Теорія ймовірності та математичної статистики. – 2009. – Вип. 80. – С. 55–62.

9. *A.V. Ivanov and B.M. Zhurakovskyi,* “Detection of hidden periodicities in the model with long range dependent noise” in Int. Conf. “Modern Stochastic: Theory and Applications II”, Ukraine, Kyiv, 7–11 September, 2010, pp. 99–100.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
18 вересня 2013 року