УДК 532.5; 551:465

П.В. Лук'янов

ІНЕРЦІЙНА СТІЙКІСТЬ ЯК РЕЗУЛЬТАТ СПІВВІДНОШЕННЯ ПЕРЕНОСНОГО І ВІДНОСНОГО ОБЕРТАНЬ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

The aim of the paper is fluid inertial stability nature determination through the representation of potential (non-rotational) motion as the compensation of two rotations, transport one and relative one. Theoretical methods are used. It is based on well-known description of fluid motion as a sum of three types (Cauchy–Helmholz theorem), but uses theoretical mechanics approach. The motion is considered as a sum of transport and relative ones. Thransport angular velocity corresponds to macroscopic motion, while relative one is caused by fluid parcel deformation. From the position, fluid potential motion is a particular case when the sum of transport and and relative angular velocities are equal to zero. As a result, using Rayleigh circulation theorem (inertial stabilty criterion), it has been pointed out inertial stability physical mechanism. It caused by relative rotation prevailing over transport one when angular velocities have different signs. A hypothetical was made in attempt to extend the assertion for general case. The proposed approach has been tested through agreement with known Kloosterziel–van Heijst inertial stability criterion for *f*-plane. The criterion derived in the paper is simpler than one because it is based on analysis of only one value – angular velocity.

Keywords: inertial stability, potential (non-rotational) motion.

Вступ

Проблема стійкості руху є однією з основних задач механіки в цілому. Для гідромеханіки, зокрема, вона має принципове значення, оскільки нестійкість у багатьох випадках призводить до переходу течії з ламінарного режиму в турбулентний.

Одним із основних видів нестійкості руху рідини є інерційний. Його теоретичне дослідження почалося ще в 19 ст. Що стосується стійкості обертального руху, то тут слід вказати на критерій Релея – так звану циркуляційну теорему [1]. Серед сучасних праць, які базуються на вказаному критерії, слід відзначити [2–6]. Так, зокрема, у [2] циркуляційна теорема розширена на рух у так званій *f*-площині, тобто за наявності двох обертань.

У зазначених вище працях стійкість руху тлумачиться за допомогою різних фізичних величин – швидкості, циркуляції швидкості, абсолютної завихреності. Це спричиняє певні труднощі в розумінні загального підходу до інерційної стійкості обертального (та загального в цілому) руху рідини. Крім того, вказані праці не дають відповіді на питання щодо інерційної стійкості загального руху нестисливої рідини.

Як виявилося, проблема стійкості тісно пов'язана з потенціальним рухом. Тому в цій роботі пропонується більш загальний і простий підхід до тлумачення зазначеного явища (стійкості) – на підставі потенціального руху сформульовано загальний критерій стійкості. Для більш зручного сприйняття результатів роботи наведемо кілька прикладів такого руху.

Відомо багато механізмів, що перебувають у складному русі, який, у решті-решт, є поступальним чи потенціальним (translation), якщо мова йде про рух рідини. Перший приклад – педальний механізм велосипеда. Коли ми їдемо на велосипеді, наші стопи не обертаються, тобто перебувають у потенціальному русі. Два рухи – зірочки педального механізму, що тягне цеп, та обертання самої педалі – приводять до відсутності абсолютного обертання. Інший приклад – це атракціон, що в народі отримав назву "Чортове колесо" (Ferris wheel). Це величезне колесо (кілька десятків метрів у діаметрі), що нагадує колеса перших пароплавів і водних млинів. "Чортове колесо" обертається дуже повільно навколо горизонтальної вісі. До нього прикріплено пару десятків кабінок. Люди, які перебувають у кабінках, не відчувають обертання, тому що самі кабінки, за аналогією із педаллю, також обертаються навколо горизонтальної вісі – у напрямку, протилежному до обертання колеса. Отже, два протилежних обертання знову приводять до відсутності абсолютного обертання. Третій приклад – це механізм, яким скріплено колеса паровоза. Ведучі колеса, що з'єднані з двигуном, рухають інші пари коліс за допомогою стальних стержнів. Ці стержні з'єднані із колесами додатковими осями. Як результат – усі колеса обертаються, а зазначені стержні перебувають у поступальному (без обертання) русі. У нашому житті існує ще багато прикладів поступального руху.

Перейдемо тепер до гідромеханіки. Розглянемо посудину у формі прямокутного паралелепіпеда, заповнену рідиною. Нехай вона рухається таким чином, що її центр маси описує колову траєкторію, а сама рідина перебуває у поступальному русі. Таке можливо [7], якщо саму посудину обертати навколо уявної вісі, що проходить через центр мас у напрямку, протилежному до обертання центра мас. Відчуваєте аналогію із попередніми прикладами? Авжеж. Знову маємо два обертання, що приводять до відсутності абсолютного обертання. Та все ж таки: відбувається обертання чи ні при потенціальному русі? Цьому питанню та інерційній стійкості, пов’язаній із ним, присвячена запропонована робота.

Постановка задачі

Предметом дослідження є інерційна стійкість обертання нестисливої рідини та поступальний (потенціальний, безвихровий) рух, що відповідає нейтральному стану цієї стійкості.

При будь-якому поступальному русі відсутнє абсолютне обертання, а у випадку руху точок нестисливої рідини по колових орбітах (потенціальний рух) маємо нейтральну криву інерційної стійкості.

Зі сказаного випливає мета роботи — дослідження інерційної стійкості рідини, що обертається, на підставі отримання фізичного тлумачення потенціального руху нестисливої рідини як компенсації переносного і відносного обертань.

Фізика поступального руху

Із теоретичної механіки відомо, що вектор швидкості будь-якої точки можна розкласти на дві складові:

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OM}, \qquad (1)$$

де індекс O стосується полюса (певної точки). Перший доданок у формулі є поступальною швидкістю полюса, а другий — коловою швидкістю обертання точки M навколо миттєвої вісі, що проходить через цей полюс; $\mathbf{r}_{OM}$ — радіус-вектор, що з’єднує точки O та M.

Використовуючи формулу (1), можна натрапити на певні труднощі в тлумаченні згаданих вище прикладів поступального руху. Набагато легше пояснити поступальний рух за допомогою представлення складного руху. Знову ж таки, з теоретичної механіки відомо, що вектор швидкості можна розкласти на переносну та відносну складові:

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r, \qquad (2)$$

де $\mathbf{V}_e$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_O + \omega_e \times \mathbf{r}_{OM}. \qquad (3)$$

Тут $\omega = \omega_e$ — це переносна кутова швидкість будь-якої точки M, що обертається навколо полюса O у миттєвому переносному русі. Тепер вектор швидкості відносного руху може також бути представлений (точка M не рухається у відносній системі координат) як

$$\mathbf{V}_r = \omega_r \times \mathbf{r}_{MP},$$

де ω_r, $\mathbf{r}_{MP}$ — відносна кутова швидкість та радіус-вектор між точками M і P відповідно.

Якщо справедлива рівність

$$\omega_e = -\omega_r,$$

то це просто означає: суперпозиція двох обертальних рухів, переносного та відносного, може призвести до поступального (потенціального) руху.

Такий підхід дуже зручний для подальшого тлумачення безвихрового руху рідини.

Безвихровий рух рідини

Згідно з теоремою Коші—Гельмгольца, будь-який рух рідини можна завжди розкласти на три складники [8—10]:

1) поступальний рух разом із певним полюсом рідкої частинки;

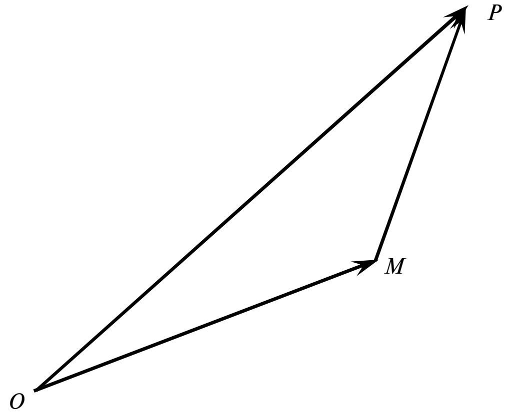
2) миттєве обертання навколо цього полюса;

3) деформації рідкої частинки (елементарного рідкого об’єму).

Звернемо увагу на такі дві обставини:

1) рух полюсу є поступальним;

2) миттєве обертання і деформації рідкої частинки містять обертальні (вихрові) рухи.



Складові радіус-вектора довільної точки рідини

Перегрупуємо типи рухів рідини згідно із зазначеним вище. Як у теоретичній механіці, *розкладемо рух рідини на переносний та відносний.* Переносний рух складається із поступального разом із певним полюсом рідкої частинки та переносного обертання полюсу разом із усією рідиною. Своєю чергою відносний рух тоді буде обертанням усіх точок рідкої частинки навколо її полюса, включаючи і деформацію рідкої частинки. Основна ідея полягає у тому, що тепер очевидна наявність двох (а не одного) обертальних рухів: обертання полюса із переносною кутовою швидкістю та відносного обертання. Дійсно, якщо ми перейдемо до границі $P \to M$ (рисунок), то отримаємо

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r \to \mathbf{V}_e,\ P \to M.$$

Для кутових швидкостей співвідношення

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r \tag{4}$$

завжди виконується, навіть коли $P \to M$.

За аналогією із педаллю: яким би чином не рухались інші її точки, вісь педалі перебуває у двох обертаннях — переносному та відносному.

Розглянемо важливий приклад — *рух рідких частинок уздовж концентричних кіл.* Для стаціонарної течії маємо:

$$V = V_\theta(r)\,.$$

Для цього прикладу легко показати, що переносна кутова швидкість становить

$$\omega_e(r) = V_\theta(r)/r \tag{5}$$

і відносна кутова швидкість, завдяки неоднорідності поля окружної швидкості (згідно (4)), має вигляд [7]

$$\omega_r(r) = \frac{dV_\theta}{dr}\,. \tag{6}$$

Відсутність обертання визначається формулою:

$$\mathrm{rot}\mathbf{V} = 0\,. \tag{7}$$

Отже, комбінуючи формули (4)–(7), можна отримати [7]

$$\frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_\theta}{r} = 0\,,$$

або те ж саме

$$\frac{dV_\theta}{dr} = -\frac{V_\theta}{r}\,.$$

Розв'язком останнього рівняння є

$$V_\theta = \frac{\mathrm{Const}}{r}\,. \tag{8}$$

Вираз (8) — це відома безвихрова течія, так званий точковий вихор. Цей приклад — чудова ілюстрація такого (за аналогією із теоретичною механікою) твердження: *у загальному випадку, поступальний (потенціальний, безвихровий) рух (течія) є просто суперпозицією двох (і, може, більше) вихрових рухів (течій), коли переносна кутова швидкість і відносна мають рівні абсолютні значення, але протилежні знаки:*

$$\omega_e = -\omega_r\,. \tag{9}$$

Можна, у випадку скептицизму, згадати перший закон Ньютона та провести аналогію: відсутність прискорення і просто руху, в інерційні системі відліку, означає або відсутність діючої сили, або нульову результуючу силу. Тепер давайте спробуємо знайти приклад із природи, де відсутність сили має місце. Не так і просто це зробити, бо набагато легше навести безліч ситуацій, коли саме результуюча сила рівна нулеві. Якщо тепер провести аналогію між силою та обертанням, то легко зрозуміти зазначене вище: *нуль у багатьох випадках у природі просто означає суму протилежних величин.*

Інерційна стійкість рідини з позицій вихрової теорії

У [1, глава 4.4] можна знайти спроби пояснити стійкість паралельної течії з позиції вихрової теорії. Спробуємо дати таке ж пояснення для обертання рідини навколо однієї вісі. Відомий критерій стійкості Релея (циркуляційна теорема) стверджує, що обертання нев'язкої рідини є стійким, якщо абсолютне значення величини пропорційної циркуляції, тобто $|V_\theta \cdot r|$, є зростаючою функцією радіальної координати r. Коли $|V_\theta \cdot r|$ спадає, рух є нестійким. Нейтральною кривою стійкості є саме потенціальний (поступальний, безвихровий) рух. Об'єднуючи циркуляційну теорему Релея та зроблені вище висновки (див. формули (7)–(9)), можна прийти до такого тлумачення інерційної (inertial, centrifugal) стійкості: обертання рідини є нестійким, коли

$$\omega_e \cdot \omega_r < 0 \ \text{ і } |\omega_r| > |\omega_e|\,. \tag{10}$$

Друга нерівність в (10) просто виражає перевищення відносного обертання (у протилежному напрямку) над переносним. Отже, можна зробити висновок: *(обертальний) рух є нестійким, коли відносне обертання перевищує переносне за умови їх різних напрямків. Нейтральна стійкість має місце, коли*

$$\omega_e = -\omega_r \text{, або } \frac{dV_\theta}{dr} = -\frac{V_\theta}{r},$$

що дає (8) — безвихровий рух.

Оскільки ми зрозуміли про фізику найпростішого типу обертального руху (течії), зробимо гіпотетичне узагальнення. Тепер замість скалярних величин ω_r, ω_e ми просто будемо використовувати їх векторні величини. Відомо (інтернет), що і в загальному випадку миттєве обертання також можна звести до одного, що має результуючу кутову швидкість, напрямлену уздовж миттєвої вісі обертання. Отже, це дає змогу гіпотетично стверджувати: у загальному випадку тривимірної течії інерційна (inertial, centrifugal) нестійкість просто означає, що миттєва переносна кутова швидкість, за абсолютним значенням, менша миттєвої відносної кутової швидкості і вони мають протилежні напрямки (знаки).

Останнє твердження не є зовсім безпідставним. Річ у тім, що однією із сучасних теорій турбулентності є саме така, що представляє рідину у вигляді диполів з нульовою результуючою циркуляцією (тобто з рівним нулеві абсолютним обертанням рідкої частинки). Автор [11] назвав це “free dipoles with zero total circulation”. Отже, як бачимо, має місце безпосередній зв’язок турбулентних течій (втрата стійкості) з локально безвихровим рухом.

Як показано нижче на прикладах простих рухів, критерій стійкості також можна сформулювати, як це вперше зробив Д. Коулз [12, 13] для найпростішого типу обертання, у термінах абсолютної кутової швидкості (або завихреності) та переносної кутової швидкості. Тоді узагальнена умова втрати стійкості буде мати такий вигляд: якщо виконується хоча б одна з нерівностей

$$\omega_i^e \cdot \omega_i^a < 0 \text{ або } \omega_i^e \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{V})_i < 0,\ i = 1,2,3, \quad (11)$$

де індекс i вказує на одну з трьох координат, то рух рідини буде нестійким. Оскільки кутова швидкість переносного руху у точці виражається формулою [14]

$$\omega^e = \frac{\mathbf{V}\times\mathbf{r}}{(\mathbf{r}\times\mathbf{r})},$$

то умова (11), завдяки $(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) > 0$, може бути записана як

$$(\mathbf{V}\times\mathbf{r})_i \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{V})_i < 0\,. \quad (12)$$

Нагадаємо ще раз, що запропоноване узагальнення має гіпотетичний характер, тобто для кожного типу рухів потрібна його перевірка.

Інерційна стійкість на *f*-площині

Ідеї критерію Релея були розвинуті у працях [2—6]. Зокрема, у [2] циркуляційна теорема була застосована для якісного обґрунтування різної поведінки динаміки вихорів залежно від того, були вони циклонічними (тобто мали однаковий із зовнішнім обертанням напрямок) чи антициклонічними. Автори зрештою дійшли такого якісного висновку: коли добуток абсолютних величин швидкості та завихреності є додатнім, то обертання є інерційно стійким і навпаки. Отже, втрата стійкості відбувається, коли вказаний добуток стає від’ємним. А стан нейтральної стійкості визначається знову ж таки відсутністю абсолютного обертання — потенціальною течією, яка є наслідком рівності нулеві абсолютного значення кутової швидкості (а разом із нею і завихреності). Нагадаємо, що насправді обертання відбувається. Просто воно складається з кількох обертань, які взаємно компенсують одне одного.

Покажемо, що запропонований підхід до визначення стійкості збігається зі щойно зазначеним.

Нехай рідина обертається із певною кутовою швидкістю Ω. На фоні цього обертання має місце течія $dV_\theta = V_\theta(r)$. Тоді абсолютна кутова швидкість буде рівна

$$\omega_a = \frac{V_\theta}{r} + \Omega + \frac{dV_\theta}{dr}\,. \quad (13)$$

Нагадаємо, що перші два доданки у правій частині (13) являють собою повну переносну кутову швидкість, тоді як третій — відносну кутову швидкість [7].

При обертанні рідини можливі три випадки:

1) $\frac{V_\theta}{r} + \Omega = 0$ — коли рідина обертається як тверде тіло;

2) $\frac{V_\theta}{r}+\Omega>0$ – циклонічне обертання чи антициклонічне за умови, що зовнішнє обертання Ω за абсолютним значенням не перевищує переносне обертання течії $\frac{V_\theta}{r}$;

3) $\frac{V_\theta}{r}+\Omega<0$ – антициклонічне обертання, протилежне до випадку 2.

Розглянемо більш детально зазначенні випадки. У першому випадку, який реалізується лише у ядрах вихорів, відсутня відносна кутова швидкість. Рух частинок стійкий. У другому випадку умова нестійкості, згідно із запропонованим підходом, має вигляд

$$\frac{V_\theta}{r}+\Omega<-\frac{dV_\theta}{dr}. \tag{14}$$

Нерівність (14) є не чим іншим, як (10), оскільки зліва маємо повну переносну кутову швидкість (що збігається зі своїм абсолютним значенням), тоді як справа – абсолютне значення відносної кутової швидкості.

У третьому випадку умова нестійкості має вигляд

$$\frac{dV_\theta}{dr}>-\frac{V_\theta}{r}-\Omega, \tag{15}$$

тобто відносна кутова швидкість (ліва частина (15)), яка тепер є додатною, перевищує, знову ж таки, абсолютне значення переносної кутової швидкості (яка в цьому разі є від'ємною).

Тепер візьмемо до уваги те, що вектори абсолютної кутової швидкості і завихреності рівні один одному із точністю до множника $\frac{1}{2}$, а знаки переносної кутової швидкості та повної швидкості (для даного класу течій) завжди збігаються: $\frac{V_\theta}{r}+\Omega$, $V_\theta+\Omega r$ [2] і $V_\theta r+\Omega r^2$ [3] одного знаку, оскільки $r>0, r^2>0$. Отже, цитована література та дійсна праця (підтверджують) не суперечать одна одній – для розглянутого класу течій.

Висновки

Для визначення інерційної стійкості течії нестисливої рідини використано підхід теоретичної механіки до опису абсолютної кутової швидкості. З позицій представлення складного руху як суми переносного та відносного обертань, вдалося пояснити, чому макроскопічне обертання рідини навколо нерухомої вісі може бути поступальним – це стає можливим завдяки наявності саме двох одночасних обертань – переносного та відносного. Саме не відсутність обертання, а компенсація вказаних двох зумовлює потенціальний рух. Оскільки потенціальний рух рідини збігається зі станом нейтральної стійкості, було показано, що порушення стійкості обертального руху визначається станом, коли відносна кутова швидкість перевищує, за модулем, переносну, а їх знаки – протилежні. Відомо, що у випадку загальної тривимірної течії результуюча миттєва кутова швидкість напрямлена також уздовж однієї (миттєвої) вісі обертання. Це дало змогу зробити припущення, що запропонований підхід має місце і при загальному русі нестисливої рідини. Саме наявність неоднорідності поля швидкості та зумовлена нею відносна кутова швидкість і є причинами виникнення інерційної нестійкості руху.

Порівняння з існуючими теоріями показало, що запропонований підхід узгоджується з ними. Але замість різних величин (швидкості та завихреності) тепер стійкість може визначатися лише однією фізичною величиною – кутовою швидкістю, що дає змогу легко сформулювати критерій для загального випадку. Перспективою подальших досліджень є застосування зазначеного тлумачення стійкості до окремих типів рухів рідини, а також для розвинення поняття вихрової (турбулентної) в'язкості. Результати роботи можуть бути використані в гідромеханіці, а також, завдяки існуючій аналогії, у теорії електромагнітних явищ.

Список літератури

1. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Изд.-во ин. лит. 1958. –195 с.
2. *R.C. Kloosterziel and G.J.F. Heijst,* "An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid", J. Fluid Mech., vol. 223, pp. 1–24, 1991.
3. *R.C. Kloosterziel et al.,* "Inertial instability and stratified fluids: barotropic vortices", Ibid, vol. 583, pp. 379–412, 2007.
4. *R.C. Kloosterziel,* "Viscous symmetric stability of circular flows", Ibid, vol. 652, pp. 171–193, 2010.

5. *G.F. Carnevale et al.,* "Predicting the aftermath of vortex breakup in rotating flow", Ibid, vol. 669, pp. 90–119, 2011.
6. *G.F. Carnevale et al.,* "Inertial and barotropic instabilities of free current in three-dimensional rotating flow", Ibid, vol. 725, pp. 117–151, 2013.
7. *Фабрикант Н.Я.* Аэродинамика. Общий курс. – М.: Наука, 1964. – 814 с.
8. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – Т. 1. – 840 с.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
10. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов ВЛ.* Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
11. *H.Z. Baumert,* "Universal equations and constants of turbulent motion" Physica Scripta, T155, 014001 (12 p), 2013.
12. *D. Coles,* "Transition in circular Couette flow", J. Fluid Mech., vol. 21, p. 385, 1965.
13. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. – М.: Мир, 1981. – 639 с.
14. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 675 с.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 лютого 2014 року