УДК 519.21

О.В. Іванов, В.В. Приходько

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАЛИШКІВ У НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ГАУССОВИМ СТАЦІОНАРНИМ ШУМОМ

In this paper non-linear regression model with Gaussian stationary random noise and continuous time is considered. The behavior of normalized in some way maximum residuals and maximum of residuals absolute values in which its the least squares estimator is substituted instead of unknown parameter of regression function. The convergence of distribution of these normalized maximum to double exponent law is proved which follows from the assumption of random noise normality. In the normalization of this maximum instead of unknown variance and the 2nd spectral moment of Gaussian stationary random noise consistent estimates of these parameters are substituted. It generalizes the residuals sum of squares of the classical regression analysis and Lindgren's the 2nd spectral moment estimator, accordingly. In the paper mathematical machinery of statistics of random processes and limit theorems for extremes of Gaussian stationary noise is used. The obtained results can be used in construction of statistical tests for adequacy of the regression model.

Keywords: non-linear regression model, maximal residuals, weak convergence, Gaussian stationary noise, variance and the second spectral moment estimators, estimator consistency.

Вступ

У класичному регресійному аналіз важливу роль у статистичному виведенні грає залишкова сума квадратів, тобто сума квадратів відхилень спостережень від функції регресії, в яку замість невідомого параметра підставлена його оцінка найменших квадратів (ОНК) (див., наприклад, [1]). Для нелінійної моделі регресії в [1] описано різні властивості статистичної оцінки невідомої дисперсії похибки спостережень.

У працях [2, 3] розглянуто граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній та нелінійній моделях регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень. Натомість у цій статті результати [2] перенесено на нелінійну модель регресії з неперервним часом і гауссовим стаціонарним випадковим шумом.

У граничних теоремах для максимумів гауссових стаціонарних процесів, на відміну від незалежних однаково розподілених випадкових величин, нормуючі функції містять теоретичні значення дисперсії та 2-го спектрального моменту цього процесу. Для того щоб такі граничні теореми стали корисними у статистичних застосуваннях, замість невідомих параметрів у нормування потрібно підставити консистентні оцінки цих параметрів. У роботі [4] такі граничні теореми було отримано для лінійної моделі регресії з корельованими спостереженнями.

Постановка задачі

Мета роботи полягає в доведенні граничних теорем для екстремальних залишків у нелінійній моделі регресії з корельованими спостереженнями, нормованих функціями, у які замість невідомих значень дисперсії та 2-го спектрального моменту стаціонарного випадкового шуму підставлено їхні консистентні статистичні оцінки.

Позначення й означення

Розглянемо нелінійну модель регресії

$$y(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

де $g(t,\theta):[0,\infty)\times\Theta^c \to R$ – функція, що залежить від невідомого параметра $\theta\in\Theta$, $\Theta\in R^q$, – обмежена відкрита опукла множина; $\varepsilon(t)$, $t\in R^1$, – випадковий шум.

Введемо такі умови.

I. $\varepsilon(t)$, $t\in R^1$, – дійсний неперервний у середньому квадратичному сепарабельний вимірний стаціонарний гауссов випадковий процес з нульовим середнім і коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)\in L_1(R^1)$.

Нехай $f(\lambda)$, $\lambda\in R^1$, – спектральна щільність випадкового процесу ε. Позначимо $\lambda_0 = B(0) = \sigma^2$, $\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 f(\lambda)\,d\lambda$. Для обмеженості 2-го спектрального моменту λ_2 необхідно і достатньо, щоб була скінченною величина $B''(0)$, і в цьому випадку $\lambda_2 = -B''(0)$ (див., наприклад, [5]).

II. (i) $B(t) = \sigma^2 - \frac{\lambda_2 t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$;

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} B(t)\ln t = 0$.

***Означення* 1.** ОНК параметра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженнями (1), називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_{1T}, \dots, \widehat{\theta}_{qT})$, для якого

$$L_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau\in\Theta^c} L_T(\tau),\ L_T(\tau) = \int_0^T (y(t) - g(t,\tau))^2 dt.$$

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_q$.

Будемо вважати, що у функції $g(t,\theta)$ існують і неперервні частинні похідні за змінними $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ до порядку $k \ge 2$ включно для кожного $t > 0$,

$$g^{(\alpha)}(t,\theta) = \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\theta_1^{\alpha_1}\dots\partial\theta_q^{\alpha_q}}\right) g(t,\theta),\ |\alpha| = \overline{1,k},$$

причому функції $g^{(\alpha)}(t,\theta)$, $|\alpha| = \overline{1,k}$, локально інтегровні з квадратом за t для довільного $\theta \in \Theta^c$.

Позначимо

$$\varphi_T(\theta_1,\theta_2) = \int_0^T (g(t,\theta_1) - g(t,\theta_2))^2 dt,$$

$$\Phi_T(u_1,u_2) = \varphi_T(\theta+u_1, \theta+u_2) = \int_0^T (g(t,\theta+u_1) - g(t,\theta+u_2))^2 dt,$$

$$\Phi_T^{(\alpha)}(u_1,u_2) = \int_0^T (g^{(\alpha)}(t,\theta+u_1) - g^{(\alpha)}(t,\theta+u_2))^2 dt,$$

$$d_T^2(\alpha,\theta) = \int_0^T (g^{(\alpha)}(t,\theta))^2 dt,\ d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta) dt,$$

$$i = \overline{1,q}.$$

Будемо вважати, що $\lim\limits_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0,\ i = \overline{1,q}$.

Нехай

$$I(\theta) = (I^{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \left(T^{-1}\int_0^T g_i(t,\theta) g_j(t,\theta) dt\right)_{i,j=1}^q,$$

$v(r) = \{x \in R^q : |x| < r\}$ — відкрита куля в R^q, $U(\theta) = \Theta - \theta$.

Припустимо, що виконуються такі умови.

III. Для довільного $R \ge 0$ існують такі константи $c_i(\alpha, R) < \infty$, $i = 1,2,3$, що

$$\sup_{\substack{u\in U^c(\theta)\cap v^c(R)\\ t\ge 0}} |g^{(\alpha)}(t,\theta+u)| \le c_1(\alpha,R),\ |\alpha| = 1; \quad (2)$$

$$\sup_{u\in U^c(\theta)\cap v^c(R)} T^{-\frac{1}{2}} d_T(\alpha,\theta+u) \le c_2(\alpha,R),\ |\alpha| = \overline{2,k};$$

$$\sup_{u_1,u_2\in U^c(\theta)\cap v^c(R)} T^{-1}\Phi_T^{(\alpha)}(u_1,u_2)\,\|u_1-u_2\|^{-2} \le c_3(\alpha,R),$$

$$|\alpha| = k.$$

Позначимо $\lambda_{\min}(A)$ найменше власне число додатно визначеної матриці A.

IV. Для деякого $\lambda_0 > 0$ для достатньо великих $T\ (T > T_0)$

$$\lambda_{\min}(I(\theta)) \ge \lambda_0.$$

V. Оцінка $\widehat{\theta}_T$ консистентна в тому розумінні, що для будь-якого $\rho > 0$ і деякого цілого $m \ge 2$

$$\mathrm{P}\{\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \ge \rho\} = \mathrm{O}(T^{-\frac{m}{2}}),\ T \to \infty. \quad (3)$$

Достатні умови виконання співвідношення (3) наведено в [6].

Покладемо

$$\widehat{y}(t) = g(t,\widehat{\theta}_T),\ \widehat{\varepsilon}(t) = y(t) - \widehat{y}(t),\ t \in R_+^1, \quad (4)$$

$$Z(t) = \max_{0\le t\le T} \varepsilon(t),\ \widehat{Z}(t) = \max_{0\le t\le T} \widehat{\varepsilon}(t).$$

Наведена далі теорема переносить результат теореми 19 з [1, с. 91] для нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень на модель (1).

***Теорема* 1.** Нехай виконано умови I, IV, V, а також умову III для $k = 2$. Тоді для деякої константи $\kappa > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\left\|T^{\frac{1}{2}}(\widehat{\theta}_T - \theta)\right\| \ge \kappa \ln^{\frac{1}{2}} T\right\} = \mathrm{O}(T^{-\frac{m}{2}}).$$

Доведення теореми 2 спирається на теорему 1.

***Теорема* 2.** Якщо виконано умови I–V, то

$$\mathrm{P}\{b_T(\sigma^{-1}\widehat{Z}_T - a_T) < z\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \Lambda(z),\ z \in R^1, \quad (5)$$

де

$$a_T = (2\ln T)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \ln 2\pi}{(2\ln T)^{\frac{1}{2}}},\ b_T = (2\ln T)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Lambda(z) = \exp\{-e^{-z}\}. \quad (6)$$

Доведення. Запишемо

$$|\widehat{Z}_T - Z_T| \le$$

$$\le \max_{o\le t\le T}|\widehat{\varepsilon}(t) - \varepsilon(t)| \le \max_{o\le t\le T}|g(t,\widehat{\theta}_T) - g(t,\theta)|.$$

З іншого боку, для $u_T = \widehat{\theta}_T - \theta$

$$g(t,\widehat{\theta}_T) - g(t,\theta) = g(t,\theta + u_T) - g(t,\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} g_i(t,\theta + u_T^*(t))u_{iT},$$

де $\|u_T^*(t)\| \le \|u_T\|$. Якщо $\|u_T\| \le 1$, то за умови (2)

$$|\widehat{Z}_T - Z_T| \le \sum_{i=1}^{q}\max_{0\le t\le T}|g_i(t,\theta + u_T^*(t))||u_{iT}| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{q} c_1(e_i,1)|u_{iT}| \le \|c\|\|u_T\|,$$

де $c = (c_1(e_1,1),\dots,c_1(e_q,1))$, e_i – i-й орт.

Маємо тепер для довільного $\rho > 0$

$$\mathrm{P}\{b_T|\widehat{Z}_T - Z_T| \ge \rho\} \le \mathrm{P}\left\{b_T\|u_T\| \ge \frac{\rho}{\|c\|}\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\{\|u_T\| \ge 1\} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2.$$

Завдяки V, $\mathrm{P}_2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$. Маємо далі

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}\left\{b_T\|u_T\| \ge \frac{\rho}{\|c\|}, \|u_T\| \ge \kappa T^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\} +$$

$$+ \mathrm{P}\left\{b_T\|u_T\| \ge \frac{\rho}{\|c\|}, \|u_T\| < \kappa T^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\} = \mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_4.$$

Оскільки $b_T = (2\ln T)^{\frac{1}{2}}$, то $\mathrm{P}_4 = 0$ для $T > T_0$. З іншого боку, за теоремою 1

$$\mathrm{P}_3 \le \mathrm{P}\left\{\|u_T\| \ge \kappa T^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\} = O(T^{-\frac{m}{2}}).$$

Теорему доведено.

З точки зору статистики випадкових процесів теорема 2 має недолік, який полягає в тому, що в реальних задачах ми не знаємо ні дисперсії σ^2, ні 2-го спектрального моменту λ_2 із нормуючої функції a_T у формулі (6). Тому в наступних двох розділах ми розглянемо консистентні оцінки σ^2 і λ_2, які мають таку властивість: якщо їх підставити у вираз (6) замість невідомих параметрів, все одно співвідношення (5) буде виконуватися.

Оцінка дисперсії випадкового шуму

Розглянемо ОНК дисперсії σ^2 випадкового шуму $\varepsilon(t)$

$$\widehat{\sigma}_T^2 = T^{-1}L_T(\widehat{\theta}_T) = T^{-1}\int_0^T (y(t) - g(t,\widehat{\theta}_T))^2 dt.$$

Запишемо

$$\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2 = T^{-1}\int_0^T(\varepsilon^2(t) - \sigma^2)dt + T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta) -$$

$$-2T^{-1}(b(\widehat{\theta}_T) - b(\theta)),$$

де $b(\theta) = \int_0^T \varepsilon(t)g(t,\theta)dt.$

Припустимо, що виконуються такі умови.

VI. Для деякого $c < \infty$

$$T^{-1}\varphi_T(\theta,\theta + u)\|u\|^{-2} \le c.$$

Для $u = \widehat{\theta}_T - \theta$ маємо

$$T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta) \le c\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^2. \quad (7)$$

Теорема 3. Якщо виконуються умови I, V, VI, оцінка $\widehat{\sigma}_T^2$ є слабко консистентною оцінкою невідомого параметра σ^2, тобто для будь-якого $r > 0$

$$\mathrm{P}\{|\widehat{\sigma}_T^2 - \sigma^2| \ge r\} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0.$$

Доведення. Запишемо

$$\widehat{\sigma}_T^2-\sigma^2=T^{-1}\int_0^T(\varepsilon^2(t)-\sigma^2)\,dt+T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)-$$
$$-2T^{-1}(b(\widehat{\theta}_T)-b(\theta)),$$

маємо

$$\mathrm{P}\{|\widehat{\sigma}_T^2-\sigma^2|\ge r\}\le \mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T(\varepsilon^2(t)-\sigma^2)\,dt\ge\frac{r}{3}\right\}+$$
$$+\mathrm{P}\left\{T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\frac{r}{3}\right\}+$$
$$+\mathrm{P}\left\{2T^{-1}|b(\widehat{\theta}_T)-b(\theta)|\ge\frac{r}{3}\right\}=\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_3.$$

Завдяки умові I

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T(\varepsilon^2(t)-\sigma^2)\,dt\ge\frac{r}{3}\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

а із (7) і умови V випливає, що

$$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left\{T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\frac{r}{3}\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Далі отримуємо

$$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}\left\{2T^{-1}|b(\widehat{\theta}_T)-b(\theta)|\ge\frac{r}{3}\right\}\le$$
$$\le \mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt\cdot T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\frac{r^2}{36}\right\}=$$
$$=\mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt<\sigma^2+1,T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)dt\cdot T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\right.$$
$$\left.\ge\frac{r^2}{36}\right\}+\mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)\,dt\ge\sigma^2+1,\right.$$
$$\left.T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)\,dt\cdot T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\frac{r^2}{36}\right\}=\mathrm{P}_4+\mathrm{P}_5,$$

$$\mathrm{P}_4\le \mathrm{P}\left\{T^{-1}\varphi_T(\widehat{\theta}_T,\theta)\ge\frac{r^2}{36}\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

$$\mathrm{P}_5\le \mathrm{P}\left\{T^{-1}\int_0^T\varepsilon^2(t)\,dt\ge\sigma^2+1\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Зібравши оцінки для P_1–P_5, отримуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

Оцінка другого спектрального моменту

Г. Ліндгрен у праці [7] запропонував оцінку 2-го спектрального моменту λ_2 гауссового стаціонарного процесу $\varepsilon(t)$, $t\in[0,T]$, вигляду

$$\widehat{\gamma}_{1T}=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh)-\varepsilon((k-1)h))^2,\ Nh=T.$$

Визначимо оцінку λ_2 для моделі спостережень (1) з використанням відхилень (4), а саме:

$$\widehat{\lambda}_{2T}=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\widehat{\varepsilon}(kh)-\widehat{\varepsilon}((k-1)h))^2,$$

де $\widehat{\varepsilon}(kh)=y(kh)-\widehat{y}(kh)=\varepsilon(kh)-(g(kh,\widehat{\theta}_T)-g(kh,\theta))$, тобто

$$\widehat{\lambda}_{2T}=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}[(\varepsilon(kh)-\varepsilon((k-1)h))-$$
$$-(g(kh,\widehat{\theta}_T)-g(kh,\theta))+(g((k-1)h,\widehat{\theta}_T)-$$
$$-g((k-1)h,\theta))]^2.$$

Позначимо

$$\Delta g(kh)=g(kh,\widehat{\theta}_T)-g(kh,\theta),$$
$$G(k,\theta)=g(kh,\theta)-g((k-1)h,\theta),$$

тоді

$$\widehat{\lambda}_{2T}=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh)-\varepsilon((k-1)h))^2-\frac{2}{Nh^2}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh)-\varepsilon((k-1)h))(\Delta g(kh)-\Delta g((k-1)h))+$$
$$+\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\Delta g(kh)-\Delta g((k-1)h))^2=\widehat{\gamma}_{1T}+\widehat{\gamma}_{2T}+\widehat{\gamma}_{3T}.$$

Доведемо збіжність до нуля за ймовірністю величин $\widehat{\gamma}_{2T}$ і $\widehat{\gamma}_{3T}$. Маємо

$$\widehat{\gamma}_{3T}=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(G(k,\widehat{\theta}_T)-G(k,\theta))^2=$$
$$=\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{q}G_i(k,\theta_{kT}^{*})(\widehat{\theta}_{iT},\theta_i)\right)^2=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{q}(\widehat{\theta}_{iT}-\theta_i)(\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j)\times$$

$$\times\frac{1}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}G_i(k,\theta^*_{kT})G_j(k,\theta^*_{kT}),$$

де $\theta^*_{kT}=\theta+\eta_k(\widehat{\theta}_T-\theta)$, $\eta_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,N}$.

Введемо додаткові умови.

VII. Похідні $g_i(t,\theta)$ задовольняють умову Ліпшиця за t рівномірно за параметром θ, тобто для деяких $c_i>0$ і будь-якого $\theta\in\Theta^c$

$$|g_i(t',\theta)-g_i(t'',\theta)|\le c_i|t'-t''|,\ t',t''\in R^1,\ i=\overline{1,q}.$$

VIII. Для деякого $M>0$: $|B'''(t)|\le M$, $t\ge 0$.

Тоді

$$|\widehat{\gamma}_{3T}|\le\sum_{i,j=1}^{q}|\widehat{\theta}_{iT}-\theta_i||\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j|\cdot\frac{1}{Nh^2}c_ic_j\sum_{k=1}^{N}h^2=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{q}c_ic_j|\widehat{\theta}_{iT}-\theta_i||\widehat{\theta}_{jT}-\theta_j|.$$

Оскільки оцінка $\widehat{\theta}_T$ – консистентна, то $\widehat{\gamma}_{3T}\xrightarrow[T\to\infty]{P}0.$

Маємо далі

$$|\widehat{\gamma}_{2T}|\le\Bigg|-\frac{2}{Nh^2}\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon(kh)-\varepsilon((k-1)h))(\Delta g(kh)-$$

$$-\Delta g((k-1)h))\Bigg|\le 2\sqrt{\widehat{\gamma}_{1T}}\sqrt{\widehat{\gamma}_{3T}}.$$

З [4] відомо, що

$$D\widehat{\gamma}_{1T}=E(\widehat{\gamma}_{1T}-E\widehat{\gamma}_{1T})^2\xrightarrow[T\to\infty]{}0,E\widehat{\gamma}_{1T}=\lambda_2+o(h).$$

Із попередніх міркувань випливає, що $\widehat{\gamma}_{2T}\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$

Теорема 4. Якщо виконуються умови I, II, V, VII, VIII, при $N=[T^2]$, $h=\dfrac{T}{[T^2]}$, $\widehat{\lambda}_{2T}$ – слабко консистентна оцінка λ_2: $\widehat{\lambda}_{2T}\xrightarrow[T\to\infty]{P}\lambda_2$.

Основні результати

Позначимо

$$\widehat{a}_T=(2\ln T)^{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{\widehat{\lambda}_{2T}}{\widehat{\sigma}^2_T}-\ln 2\pi}{(2\ln T)^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 5. Якщо виконано умови I–VIII, то для моделі регресії (1)

$$\mathrm{P}\{b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}_T-\widehat{a}_T)<z\}\xrightarrow[T\to\infty]{}\Lambda(z),\ z\in R^1.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 5 із [4].

З урахуванням асимптотичної незалежності максимуму і мінімуму гауссового стаціонарного процесу ([8, с. 251, теорема 11.1.5]) для $\widehat{Z}^*_T=\max\limits_{0\le t\le T}|\widehat{\varepsilon}(t)|$ отримуємо такий результат.

Теорема 6. Якщо виконано умови I–VIII, то для моделі регресії (1)

$$\mathrm{P}\{b_T(\widehat{\sigma}_T^{-1}\widehat{Z}^*_T-\widehat{a}_T)<z\}\xrightarrow[T\to\infty]{}\Lambda^2(z),\ z\in R^1.$$

Висновки

У статті отримано граничні теореми для екстремальних залишків у нелінійній моделі регресії із гауссовим стаціонарним випадковим шумом та неперервним часом. Вони стверджують, що розподіли нормованих певним чином максимальних залишків або максимальних абсолютних величин цих залишків збігаються до подвійної експоненти.

Отримання швидкості збіжності в цих граничних теоремах і побудова критеріїв перевірки гіпотез про адекватність розглянутої нелінійної моделі регресії є природним напрямом продовження дослідження.

Список літератури

1. *A.V. Ivanov,* Asymptotic theory of nonlinear regression. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1997, 330 p.
2. *Іванов О.В., Мацак І.К.* Граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній та нелінійній моделях регресії // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – № 86. – С. 69–80.
3. *Іванов О.В., Мацак І.К.* Граничні теореми для екстремальних залишків у моделі регресії з важкими хвостами спостережень // Там же. – 2013. – № 88. – С. 59–67.
4. *Іванов О.В., Приходько В.В.* Граничні теореми для екстремальних залишків у лінійній моделі регресії з га-

уссовим стаціонарним шумом // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2013. – № 4. – С. 55–62.
5. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 399 с.
6. *Леоненко Н.Н., Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей. – К.: Вища школа, 1986. – 216 с.
7. *G. Lindgren,* “Spectral moment estimation by means of level crossings”, Biometrica, vol. 61, is. 3, pp. 401–418, 1974.
8. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
22 листопада 2013 року