УДК 517.958:512.816

В.І. Стогній, І.М. Копась, С.С. Коваленко

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ ОДНОГО КЛАСУ (2+1)-ВИМІРНИХ ЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

In this paper, a class of (2+1)-dimensional linear ultra-parabolic equations of the second order is investigated by using the methods of group analysis of differential equations. The class under study generalizes a number of the classical equations of mathematical physics such as the free Kramers equation, the linear Kolmogorov equation etc. The classification of the symmetry properties of equations from the class is carried out by using the well-known Lie–Ovsiannikov algorithm. At the first step, a kernel of the maximal algebras of invariance (MAIs) of the differential equations under study is found. It is proved that the one is a three-dimensional. A theorem about a "minimal" MAI of differential equations from the class is also formulated. At the second step, a group of equivalence transformations of the class under study is found. First, by using the infinitesimal method, the group of continuous equivalence transformations is calculated, which is then added to the complete equivalence group by two discrete transformations. At the third step, as a result of analysis of the system of determining equations, a theorem giving necessary conditions of the extension of the "minimal" MAI is formulated, namely, it is proved that a functional parameter involved in the class under study must satisfy one of the two Rikkati equations. Three examples of differential equations satisfying the necessary conditions of extension of the "minimal" MAI are considered. The MAIs of all equations are found. It is shown that among the examples considered the linear Kolmogorov equation admits the maximal symmetry properties.

Keywords: linear ultra-parabolic equation, Lie symmetry, maximal algebra of invariance, equivalence transformation.

Вступ

Методами групового аналізу диференціальних рівнянь досліджується такий клас (2+1)-вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь:

$$u_t = u_{xx} - (A(x)u)_x - (xu)_y, \tag{1}$$

де $u = u(t,x,y)$; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $A(x)$ – довільна гладка в деякій області простору $\mathbf{R}$ функція змінної x.

Клас (1) містить низку відомих диференціальних ультрапараболічних рівнянь другого порядку, які описують різноманітні процеси у природничих науках.

Так, у випадку $A(x) \equiv 0$ рівняння (1) набуває такого вигляду:

$$u_t = u_{xx} - xu_y. \tag{2}$$

Це рівняння було запропоноване А.М. Колмогоровим у 1933 р. [1] (див. також [2]) для опису броунівського руху частинки. Зауважимо також, що останнім часом воно почало активно застосовуватися в деяких питаннях фінансової математики [3].

У випадку $A(x) = -x$ рівняння (1) є вільним рівнянням Крамерса:

$$u_t = (xu + u_x)_x - xu_y, \tag{3}$$

яке описує рух частинки у флуктуючому середовищі [4, 5]. Також у цьому випадку рівняння (1) є рівнянням кольорового шуму [5]:

$$u_t = (xu + u_x)_x - ((h(y) + xg(y))u)_y$$

при $h(y) \equiv 0$ і $g(y) = 1$.

Зауважимо також, що рівняння (1) є окремим випадком двовимірного рівняння Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[B_{ij}(t,x)u],$$

де $x = (x_1, x_2)$; коефіцієнти зносу $\mathbf{A}(t,x)$ та дифузії $\mathbf{B}(t,x)$ визначаються відповідно як вектор

$$\mathbf{A}(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x))$$

і матриця

$$\mathbf{B}(t,x) = \| B_{ij}(t,x) \|_{i,j=1}^{2}.$$

Легко бачити, що коефіцієнти зносу та дифузії рівняння (1) мають відповідно такий вигляд:

$$\mathbf{A}(t,x,y) = (A(x), x), \quad \mathbf{B}(t,x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь вигляду (1) було розпочато в роботі [6], де для вільного рівняння Крамерса (3) було знайдено максимальну алгебру інваріантності (МАІ), оператори якої були використані для побудови точних інваріантних розв'язків цього рівняння [7]. У праці [8] для рівняння (2) було отримано ряд точкових перетворень симетрії, проте повний груповий аналіз цього рівняння не було проведено. МАІ рівняння (2) була обчислена в [9]. Також у цій статті було проведено класифікацію всіх двовимірних підалгебр знайденої МАІ, проведено симетрійну редукцію рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь і побудовано ряд його точних інваріантних розв'язків.

Отже, з точки зору теоретико-групових методів було досліджено лише окремі рівняння з класу (1), тоді як вичерпного опису симетрійних властивостей диференціальних рівнянь із цього класу ще не було проведено.

Постановка задачі

Метою роботи є: 1) знайти ядро $A^{\ker}$ МАІ диференціальних рівнянь із класу (1); 2) знайти необхідні умови розширення ядра $A^{\ker}$; 3) розглянути ряд конкретних рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями.

Ядро максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1)

Знайдемо ядро $A^{\ker}$ МАІ диференціальних рівнянь із класу (1), тобто обчислимо МАІ рівняння (1) у випадку довільної функції $A(x)$.

Теорема 1. Ядром $A^{\ker}$ МАІ диференціальних рівнянь із класу (1) є тривимірна алгебра Лі, що генерується такими базисними операторами:

$$X_1 = \partial_t, \ X_2 = \partial_y, \ X_3 = u\partial_u. \qquad (4)$$

Д о в е д е н н я. Згідно із загальним алгоритмом Лі [10, 11] інфінітезимальні оператори, що генерують алгебру інваріантності рівняння (1), шукаємо в класі диференціальних операторів першого порядку

$$X = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \eta\partial_u, \qquad (5)$$

де $\xi^i = \xi^i(t,x,y,u)$, $i = 0,1,2$; $\eta = \eta(t,x,y,u)$ — довільні двічі диференційовані функції в деякій області простору незалежних змінних t, x, y та залежної змінної u.

Умова інваріантності рівняння (1) відносно оператора (5) має вигляд

$$\varphi^t - \varphi^{xx} + \xi^1 A'' u + A'\eta + \xi^1 A' u_x + A\varphi^x + \\ + \xi^1 u_y + x\varphi^y \big|_{(1)} = 0, \qquad (6)$$

де

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\xi^0) - u_x D_t(\xi^1) - u_y D_t(\xi^2);$$

$$\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\xi^0) - u_x D_x(\xi^1) - u_y D_x(\xi^2);$$

$$\varphi^y = D_y(\eta) - u_t D_y(\xi^0) - u_x D_y(\xi^1) - u_y D_y(\xi^2);$$

$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\xi^0) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xy} D_x(\xi^2),$$

де D_t, D_x, D_y — оператори повного диференціювання відповідно за змінними t, x, y; умова $\big|_{(1)}$ в (6) означає заміну u_t на $u_{xx} - (A(x)u)_x - x u_y$; $A' = \dfrac{dA}{dx}$.

Виконавши в (6) відповідні перетворення та обчислення, переконуємось, що визначальні рівняння для знаходження координат оператора X та функції $A(x)$ мають такий вигляд:

$$\xi^0_x = \xi^0_y = \xi^1_{xx} = \xi^2_x = \eta_{uu} = 0;$$

$$\xi^0_t - 2\xi^1_x = 0;$$

$$\xi^1 + (\xi^0_t - \xi^2_y)x - \xi^2_t = 0; \qquad (7)$$

$$2\eta_{xu} + \xi^1_t + \xi^1_y x - (\xi^0_t - \xi^1_x)A - \xi^1 A' = 0;$$

$$\eta_t - \eta_{xx} + \eta_y x + \eta_x A + \eta A' - \eta_u A' u + \\ + \xi^0_t A' u + \xi^1 A'' u = 0.$$

З першого рівняння системи (7) випливає, що $\xi^0 = \xi^0(t)$; $\xi^1 = \xi^1(t,x,y)$; $\xi^2 = \xi^2(t,y)$; $\eta = \alpha(t,x,y)u + \beta(t,x,y)$, тоді останні чотири рівняння набудуть такого вигляду:

$$\xi^0_t - 2\xi^1_x = 0;$$

$$\xi^1 + (\xi^0_t - \xi^2_y)x - \xi^2_t = 0;$$

$$2\alpha_x + \xi_t^1 + \xi_y^1 x - (\xi_t^0 - \xi_x^1)A - \xi^1 A' = 0\,; \qquad (8)$$

$$\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_y x + \alpha_x A + \xi_t^0 A' + \xi^1 A'' = 0\,;$$

$$\beta_t - \beta_{xx} + \beta_y x + \beta_x A + \beta A' = 0\,.$$

Оскільки функція A — довільна, то, розщепивши рівняння системи (8) за A та її похідними, одержимо такі рівності:

$$\xi_t^0 = \xi^1 = \xi_t^2 = \xi_y^2 = \alpha_t = \alpha_x = \alpha_y = \beta = 0\,. \qquad (9)$$

Із системи (9) випливає, що

$$\xi^0 = c_1\,;\ \xi^1 = 0;\ \xi^2 = c_2\,;\ \eta = c_3 u\,, \qquad (10)$$

де c_1, c_2, c_3 — довільні дійсні сталі. Оператор X із координатами (10) породжує алгебру (4).

Теорему доведено.

***Наслідок* 1.** Диференціальне рівняння (1) з довільною фіксованою функцією $A(x)$ допускає як алгебру інваріантності нескінченновимірну алгебру Лі з таким набором базисних операторів:

$$X_1 = \partial_t\,,\ X_2 = \partial_y\,,\ X_3 = u\partial_u\,,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u\,,$$

де $\beta = \beta(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1).

Група перетворень еквівалентності класу рівнянь (1)

Перш ніж перейти до розв'язання задачі класифікації симетрійних властивостей диференціальних рівнянь із класу (1), знайдемо групу перетворень еквівалентності цього класу.

Означення. Перетворенням еквівалентності класу рівнянь (1) називається невироджена локальна заміна змінних

$$\bar{t} = T(t,x,y,u)\,;\ \bar{x} = X(t,x,y,u)\,;\ \bar{y} = Y(t,x,y,u)\,;$$

$$\bar{u} = U(t,x,y,u)\,;\ \bar{A} = \Phi(t,x,y,u,A)\,,$$

яка переводить кожне рівняння з класу (1) на функцію $u = u(t,x,y)$ з довільним елементом A у деяке інше рівняння з цього самого класу на функцію $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ з новим довільним елементом $\bar{A}$.

Множина перетворень еквівалентності становить групу перетворень еквівалентності, яку ми надалі позначатимемо E. Неперервна частина цієї групи E_c утворює групу Лі, алгебру Лі якої знаходять за відомим алгоритмом [10, 11].

Теорема 2. Алгебра Лі неперервної підгрупи E_c групи перетворень еквівалентності E класу рівнянь (1) генерується такими операторами:

$$E_1 = \partial_t;\ E_2 = \partial_y;\ E_3 = u\partial_u;\ E_4 = t\partial_y + \partial_x;$$

$$E_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - A\partial_A\,.$$

Скінченні перетворення, що відповідають операторам з теореми 2, отримуються розв'язуванням відповідних рівнянь Лі. Провівши необхідні обчислення, приходимо до такого твердження.

***Наслідок* 2.** Група E_c неперервних перетворень еквівалентності класу рівнянь (1) складається з таких перетворень:

$$\bar{t} = \alpha^2 t + \delta_1\,;\ \bar{x} = \alpha x + \beta\,;\ \bar{y} = \alpha^3 y + \beta t + \delta_2\,;$$

$$\bar{u} = \gamma u\,;\ \bar{A} = \frac{1}{\alpha}A\,,$$

де $\alpha > 0$; β; $\gamma > 0$; $\delta_i (i = 1,2)$ — довільні дійсні сталі.

***Зауваження* 1.** Група E перетворень еквівалентності досліджуваного класу диференціальних рівнянь (1), крім неперервної її підгрупи, містить також ряд дискретних перетворень, а саме такі дві інверсії:

$$1)\ u \to -u\,;$$

$$2)\ x \to -x,\ y \to -y,\ A \to -A\,.$$

Розширення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (1)

Тепер розглянемо розв'язок задачі виділення з класу (1) тих диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні симетрійні властивості, тобто допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж $A^{\ker} \oplus_s \langle \beta(t,x,y)\partial_u \rangle$, де $\beta = \beta(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1); символом $\oplus_s$ тут і надалі позначається напівпряма сума двох алгебр Лі. Для цього необхідно розв'язати систему визначальних рівнянь (8).

Із перших трьох рівнянь цієї системи отримуємо

$$\xi^0 = \tau(t),\ \xi^1 = \frac{1}{2}x\tau' + \frac{3}{2}y\tau'' + \varphi',\ \xi^2 = \frac{3}{2}y\tau' + \varphi, \quad (11)$$

$$\alpha = -\frac{3}{4}xy\tau''' + \left(\frac{3}{4}yA - \frac{1}{2}x^2\right)\tau'' +$$

$$+\frac{1}{4}xA\tau' - \frac{1}{2}x\varphi'' + \frac{1}{2}A\varphi' + \mu, \quad (12)$$

де $\varphi = \varphi(t)$ і $\mu = \mu(t, y)$ — довільні гладкі функції своїх змінних; штрих означає диференціювання за змінною t.

Підстановка виразів (11) і (12) у четверте рівняння системи (8) приводить до такого рівняння:

$$\frac{3}{4}y(\tau''\Phi' - x\tau^{(4)}) - \frac{5}{4}x^2\tau''' + \tau'' + \frac{1}{4}\tau'(x\Phi' + 2\Phi) -$$

$$-\frac{1}{2}x\varphi''' + \frac{1}{2}\varphi'\Phi' + x\mu_y + \mu_t = 0, \quad (13)$$

де $\Phi(x) = A' + \frac{1}{2}A^2$.

Провівши аналіз рівняння (13), приходимо до такого твердження.

Теорема 3. Диференціальне рівняння (1) з деякою фіксованою функцією $A(x)$ допускає алгебру інваріантності вищої розмірності за $A^{\ker} \oplus_s \langle \beta(t,x,y)\partial_u \rangle$, де $\beta = \beta(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1) тоді, коли функція $A(x)$ (вибрана з точністю до перетворень еквівалентності з групи E) задовольняє одне з таких двох рівнянь:

$$A' + \frac{1}{2}A^2 = k_1 x + k_0 + \frac{k_{-1}}{x} + \frac{k_{-2}}{x^2}, \quad (14)$$

$$A' + \frac{1}{2}A^2 = m_2 x^2 + m_1 x + m_0, \quad (15)$$

де k_i ($i = -2, -1, 0, 1$), m_j ($j = 0, 1, 2$) — дійсні сталі.

Зауважимо, що рівняння (14) і (15) є рівняннями Ріккаті, загальний розв'язок яких не вдається побудувати у квадратурах, проте для деяких конкретних значень сталих k_i і m_j розв'язки відповідних рівнянь є відомими [12]. Тут ми не ставимо за мету проаналізувати всі можливі варіанти, а зупинимося лише на деяких типових прикладах.

***Приклад* 1.** $k_{-1} = k_0 = k_1 = 0$, $k_{-2} = -\frac{1}{2}$.

У цьому випадку рівняння (14) має такий частинний розв'язок:

$$A(x) = \frac{2}{x \ln x} + \frac{1}{x}. \quad (16)$$

Рівняння (1) з функцією $A(x)$, яка задається рівнянням (16), допускає як МАІ нескінченновимірну алгебру Лі з таким набором базисних операторів:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = u\partial_u,$$

$$X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y + \frac{1}{\ln x}u\partial_u,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u,$$

де $\beta = \beta(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1).

Отже, в цьому випадку розширення симетрійних властивостей відбувається за рахунок одного оператора X_4.

***Приклад* 2.** $m_0 = -1$, $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{1}{2}$.

У цьому випадку частинним розв'язком рівняння (15) є функція $A(x) = -x$, тобто рівняння (1) є вільним рівнянням Крамерса (3). Його МАІ була обчислена у статті [6] і генерується такими операторами:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = u\partial_u,$$

$$X_4 = 2\partial_x + 2t\partial_y - (x+y)u\partial_u,\ X_5 = e^{-t}(-\partial_x + \partial_y),$$

$$X_6 = e^t(\partial_x + \partial_y - xu\partial_u),\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u,$$

де $\beta = \beta(t,x,y)$ — довільний гладкий розв'язок рівняння (3).

Як бачимо, скінченновимірна частина МАІ вільного рівняння Крамерса є шестивимірною і розширюється порівняно із $A^{\ker}$ за рахунок операторів X_4, X_5 і X_6.

***Приклад* 3.** $m_0 = m_1 = m_2 = 0$.

Загальним розв'язком відповідного рівняння (15) є такі функції:

$$A_1(x) = 0,\ A_2(x) = \frac{2}{x + c},$$

де c — довільна стала інтегрування.

Випадок функції $A_1(x) = 0$ приводить до рівняння (2), МАІ якого була обчислена у праці [9] і генерується такими операторами:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = u\partial_u,\ X_4 = \partial_x + t\partial_y,$$

$$X_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y\,,\ X_6 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u\,,$$

$$X_7 = t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (x^2+2t)u\partial_u,$$

$$X_8 = 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y-tx)u\partial_u\,,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u\,,$$

де $\beta = \beta(t,x,y)$ – довільний гладкий розв'язок рівняння (2).

У випадку ж функції $A_2(x) = \frac{2}{x}$ (тут для простоти покладено $c = 0$, що не зменшує загальності міркувань) МАІ відповідного рівняння (1) породжується такими операторами:

$$X_1 = \partial_t\,,\ X_2 = \partial_y\,,\ X_3 = u\partial_u\,,$$

$$X_4 = \partial_x + t\partial_y + \frac{1}{x}u\partial_u\,,\ X_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y\,,$$

$$X_6 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - \left(x - \frac{2t}{x}\right)u\partial_u\,,$$

$$X_7 = t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - \left(x^2 + t - \frac{3y}{x}\right)u\partial_u\,,$$

$$X_8 = 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3\left(y - tx + \frac{t^2}{x}\right)u\partial_u\,,$$

$$X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u\,,$$

де $\beta = \beta(t,x,y)$ – довільний гладкий розв'язок відповідного рівняння (1).

Бачимо, що як у випадку функції $A(x) = 0$, так і у випадку $A(x) = \frac{2}{x}$ відповідні рівняння вигляду (1) мають найширші серед розглянутих прикладів симетрійні властивості, а саме скінченновимірна частина відповідних МАІ цих рівнянь є восьмивимірною.

***Зауваження* 2.** Однакова розмірність МАІ рівнянь (1) з $A(x) = 0$ і $A(x) = \frac{2}{x}$ наводить на думку, що ці рівняння можуть бути зведені одне в одне за допомогою деякого точкового перетворення змінних. Дійсно, прямою перевіркою легко показати, що за допомогою заміни змінних

$$t \to t\,,\ x \to x\,,\ y \to y\,,\ u \to \frac{1}{x}u \qquad (17)$$

рівняння (1) з $A(x) = \frac{2}{x}$ зводиться до рівняння (2), тобто до рівняння (1) з $A(x) = 0$.

Відзначимо, що перетворення (17) не входять до групи E перетворень еквівалентності класу рівнянь (1), тобто вони є так званими допустимими (за іншою термінологією – формозберігаючими) перетвореннями в цьому класі рівнянь [13, 14].

Висновки

У цій статті методами групового аналізу диференціальних рівнянь вивчався клас (1) лінійних (2+1)-вимірних ультрапараболічних рівнянь другого порядку, який узагальнює низку класичних диференціальних рівнянь математичної фізики, таких як вільне рівняння Крамерса, рівняння Колмогорова, рівняння кольорового шуму тощо.

Класифікація симетрійних властивостей диференціальних рівнянь із класу (1) проводилася на основі класичного методу Лі. На першому етапі знайдено ядро МАІ диференціальних рівнянь з класу (1); далі з використанням інфінітезимального методу обчислено групу неперервних перетворень еквівалентності класу (1), яку доповнено до повної групи перетворень еквівалентності двома дискретними перетвореннями.

Головним вислідом роботи є теорема 3, яка дає необхідні умови того, щоб диференціальне рівняння вигляду (1) допускало нетривіальні симетрійні властивості. Було доведено, що для цього функція $A(x)$, яка входить до складу рівняння (1), повинна задовольняти одне з двох рівнянь Ріккаті (14) і (15). Як ілюстрацію цього було розглянуто три приклади рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями. Було показано, що серед розглянутих рівнянь найширшу групу неперервних перетворень симетрії має рівняння Колмогорова (2).

Проте слід зауважити, що повний аналіз рівнянь (14) і (15) не було проведено, що може стати предметом наших подальших досліджень.

Список літератури

1. *A.N. Kolmogoroff,* "Zur Theorie der stetigen zufallingen Prozesse", Math. Ann., vol. 108, no. 1, pp. 149–160, 1933.

2. *A.N. Kolmogoroff,* "Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung)", Ann. Math., vol. 35, no. 2, pp. 116–117, 1934.

3. *E. Barucci et al.,* "Some results on partial differential equations and Asian options", Math. Models Methods Appl. Sci., vol. 11, pp. 475–497, 2001.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
5. *Risken H.* The Fokker–Planck equation. Berlin: Springer, 1989, 472 p.
6. *W.M. Shtelen and V.I. Stogny,* "Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 22, pp. 539–543, 1989.
7. *E.A. Saied,* "On the similarity solutions for the free Kramers equation", Appl. Math. Comp., vol. 74, pp. 59–63, 1996.
8. *E. Lanconelli and S. Polidoro,* "On a class of hypoelliptic evolution operators", Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, vol. 52, pp. 29–63, 1994.
9. *Спічак С.В., Стогній В.І., Копась І.М.* Симетрійний аналіз і точні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 93–97.
10. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
11. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.
12. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
13. *J.G. Kingston and C. Sophocleous,* "On form-preserving point transformations of partial differential equations", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 31, pp. 1597–1619, 1998.
14. *R.O. Popovych et al.,* "Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrodinger equations", Acta Appl. Math., vol. 109, pp. 315–359, 2010.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 квітня 2014 року