УДК 519.21

О.В. Іванов, К.К. Москвичова

АСИМПТОТИЧНІ РОЗКЛАДИ МОМЕНТІВ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ВЕКТОРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З КОРЕЛЬОВАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

A nonlinear regression model with continuous time and mean square continuous separable measurable Gaussian stationary random noise with zero mean and integrable covariance function is considered. Parameter estimation in the models of such kind is an important problem of statistics of random processes. In this paper, the first terms of asymptotic expansions of the bias vector and covariance matrix of the least square estimator of nonlinear regression function vector parameter are obtained. The machinery of the theory of stochastic processes and asymptotic theory of nonlinear regression were used to derive the results. In particular, the theorems on stochastic expansion of the least square estimator for smooth regression function and on strengthened consistency of the least squares estimator of the nonlinear regression model multidimensional parameter have been used. Obtained results allow answering question important in applications about asymptotic behavior of the first and second moments of the least squares estimator of nonlinear regression model parameter.

Keywords: nonlinear regression mode, stationary Gaussian noise, least squares estimator, asymptotic expansion.

Вступ

Серед багатьох математичних моделей статистики випадкових процесів модель "сигнал плюс шум" – одна з найбільш широко використовуваних. Багато математичних результатів щодо статистичних оцінок невідомих параметрів корисного сигналу містяться у працях [1–5]. Особливий прикладний інтерес становить задача про асимптотичну поведінку перших моментів (зсуву) і других моментів (коваріаційної матриці) статистичних оцінок невідомих параметрів моделі. Якщо моменти оцінки збігаються до моментів деякого граничного розподілу, то найбільш актуальним стає питання швидкості цієї збіжності й опис старших членів асимптотики. Остання задача, поставлена для оцінок максимальної правдоподібності, відома як задача Лінніка.

Для різних класів статистичних оцінок задача про моменти була розв'язана в 70–80-ті рр. минулого століття в роботах І.А. Ібрагімова і Р.З. Хасьмінського та їхніх учнів (див. [6] і наявні там посилання). Асимптотичні розклади для змішаних моментів будь-якого порядку оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної моделі регресії з незалежними однаково розподіленими помилками спостережень були отримані в той же час О.В. Івановим [7], а перших і других моментів – Г. Кларком [8].

Постановка задачі

Метою роботи є отримання асимптотичних розкладів зсуву і коваріаційної матриці оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом за припущенням, що функція регресії є гладкою, а випадковий шум є стаціонарним гауссовим випадковим процесом.

Модель регресії і основні позначення

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

де $g(t,\theta) : [0,+\infty)\times\Theta_\gamma \to \mathbb{R}^1$ – неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ – обмежена відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup\limits_{\|a\|\le 1}(\Theta + a\gamma)$, $\gamma > 0$ – деяке число; $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, – випадковий шум, відносно якого припустимо, що

I. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, – неперервний у середньому квадратичному сепарабельний вимірний стаціонарний гауссов процес із нульовим середнім і абсолютно інтегровною коваріаційною функцією $\mathbf{B}(t) = \mathrm{E}\varepsilon(t)\varepsilon(0)$.

***Означення* 1**. Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t),$ $t \in [0,T]) = (\hat{\theta}_{1T},\ldots\hat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ (Θ^c – замикання Θ), для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau\in\Theta^c} Q_T(\tau),\ \ Q_T(\tau) = \int_0^T [X(t) - g(t,\tau)]^2 dt.$$

У роботі отримано асимптотичні розклади моментів оцінки найменших квадратів параметра θ моделі (1).

Попередні зауваження

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_q!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q$, $u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \ldots u_q^{\alpha_q}$, $u = (u_1, \ldots, u_q)$. Для гладкої функції $a(\tau)$ покладемо

$$a^{(\alpha)}(\tau) = (\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1}\tau_1 \ldots \partial^{\alpha_q}\tau_q) a(\tau),$$

$$a_{i_1 \ldots i_r}(\tau) = (\partial^r / \partial\tau_{i_1} \ldots \partial\tau_{i_r}) \ a(\tau),\ i_1, \ldots, i_r = \overline{1, q}.$$

Припустимо, що у функції $g(t, \tau)$ для кожного $t > 0$ існують і неперервні всі частинні похідні за змінними $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$ до порядку $k \geq 2$ включно, причому функції $g^{(\alpha)}(t, \tau)$, $|\alpha| = \overline{1, k}$, локально інтегровні з квадратом за t для довільного $\tau \in \Theta^c$. Позначимо

$$d_{iT}^2(\tau) = \int_0^T g_i^2(t, \tau) dt,\ \ i = \overline{1, q},$$

$$d_T^2(\alpha, \tau) = \int_0^T (g^{(\alpha)}(t, \tau))^2 dt,\ \ |\alpha| = \overline{1, k}.$$

Будемо вважати, що $\liminf\limits_{T \to \infty} T^{-1} d_{iT}(\theta) > 0$, $i = \overline{1, q}$. Нехай також

$$\Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T (g^{(\alpha)}(t, \tau_1) - g^{(\alpha)}(t, \tau_2))^2 dt,$$

$$I(\theta) = (I_{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = (T^{-1} \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt)_{i,j=1}^q,$$

$$\Lambda(\theta) = (\Lambda^{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = I^{-1}(\theta),$$

$\lambda_{\min}(A)$ — найменше власне число додатно визначеної матриці A.

Позначимо

$$b_{i_1 \ldots i_r}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g_{i_1 \ldots i_r}(t, \theta) dt,$$

$$b(\alpha, \theta) = b^{(\alpha)}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t, \theta) dt,$$

$$a_{i_1 \ldots i_r}(\theta) = T^{-1} \mathrm{E}\, Q_{T, i_1 \ldots i_r}(\theta).$$

Через $C_i, i \geq 1$, будемо позначати додатні скінченні сталі. Наявність у будь-якому співвідношенні сталої C_i означає, що існує така стала C_i, що це співвідношення виконується. Припустимо, що виконуються такі умови:

$$\text{II.}\ \sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-\frac{1}{2}} d_T(\alpha; \tau) \leq C_1(\alpha),\ |\alpha| = \overline{1, k}; \tag{2}$$

$$\sup_{\tau_1, \tau_2 \in \Theta^c} T^{-1} \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) \| \tau_1 - \tau_2 \|^{-2} \leq C_2(\alpha),\ |\alpha| = k. \tag{3}$$

III. Для деякого $\lambda_0 > 0$ для достатньо великих T $(T > T_0)$

$$\lambda_{\min}(I(\theta)) \geq \lambda_0.$$

Сформулюємо теорему про стохастичний асимптотичний розклад оцінки $\hat{\theta}_T$, що є зручним для нас переформулюванням теореми 3.3.2 із [1, с. 155].

Теорема 1. Нехай виконано умови I–III, а оцінка найменших квадратів $\hat{\theta}_T$ консистентна в тому розумінні, що для будь-якого $\rho > 0$ і деякого цілого $m \geq 2$

$$P\{\| \hat{\theta}_T - \theta \| \geq \rho\} = O(T^{-\frac{m}{2}}),\ T \to \infty. \tag{4}$$

Тоді

$$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\theta}_T - \theta) = \sum_{\nu=0}^{k-2} h_\nu(\theta) T^{-\frac{\nu}{2}} + \xi_{k-1}(\theta) T^{-\frac{k-1}{2}}, \tag{5}$$

де випадковий вектор $\xi_{k-1}(\theta)$ має властивість

$$P\{\| \xi_{k-1}(\theta) \| \geq C_3 \log^{\frac{k}{2}} T\} = O(T^{-\frac{m}{2}}),$$

$h_\nu(\theta) = (h_{\nu i}(\theta))_{i=1}^q$, $\nu = \overline{0, k-2}$, — однорідні векторні поліноми степеня $\nu + 1$ від випадкових змінних $b^{(\alpha)}(\theta), |\alpha| = \overline{1, \nu + 1}$, з рівномірно за T обмеженими коефіцієнтами.

Для запису перших поліномів розкладу (5) приймемо тензорну угоду, а саме: якщо в добутку двох або більшого числа множників деякий індекс трапляється двічі, це означає підсумовування за цим індексом від 1 до q.

Тоді маємо, не вказуючи в запису формул залежність від θ,

$$h_0 = (\Lambda^{ii_1} b_{i_1})_{i=1}^{q}, \qquad (6)$$

$$h_1 = \left(\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\left(b_{i_1 i_2} b_{i_3} - \frac{1}{4}\Lambda^{i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_4} b_{i_3} b_{i_5} \right)\right)_{i=1}^{q}, \qquad (7)$$

$$h_2 = \left(\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\Lambda^{i_4 i_5}\left(\frac{1}{2} b_{i_1 i_2 i_4} b_{i_3} b_{i_5} + b_{i_1 i_5} b_{i_2 i_4} b_{i_3} \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\Lambda^{i_4 i_5}\Lambda^{i_6 i_7} b_{i_5} b_{i_7} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{6} a_{i_1 i_2 i_4 i_6} b_{i_3} + \frac{1}{2} a_{i_2 i_4 i_6} b_{i_1 i_3} + a_{i_1 i_2 i_6} b_{i_3 i_4} - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{4}\Lambda^{i_8 i_9} a_{i_1 i_2 i_8} a_{i_3 i_4 i_6} b_{i_9} \right)\right)_{i=1}^{q}. \qquad (8)$$

Достатні умови виконання (4) містяться в [7], див. також [1].

Для того ж значення m, що і в теоремі 1, припустимо, що виконується умова

$$\text{IV.}\ \ P\{T^{1/2}\|\hat{\theta}_T - \theta\| \geq M\} \leq C_4 M^{-m} \qquad (9)$$

при всіх достатньо великих M.

Достатні умови правильності оцінки (9) імовірностей великих відхилень нормованої оцінки $\hat{\theta}_T$ містяться в [7], див. також [1]. Очевидно, що (4) випливає з (9) при $M = \rho T^{1/2}$.

Основний результат

Позначимо

$$\Psi_{(i_1 \dots i_r)(j_1 \dots j_k)}(\theta) = \mathrm{E} b_{i_1 \dots i_r}(\theta) b_{j_1 \dots j_k}(\theta) =$$

$$= T^{-1}\int_0^T \mathbf{B}(t-s) g_{i_1 \dots i_r}(t,\theta) g_{j_1 \dots j_k}(s,\theta)\, dt ds.$$

Для $\lambda \in s(1) = \{\lambda \in \mathbb{R}^1 : |\lambda| = 1\}$ покладемо

$$\theta_T\langle\lambda\rangle = \langle T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta), \lambda\rangle, \quad \xi_3\langle\lambda\rangle = \langle \xi_3, \lambda\rangle,$$

$$h_\nu\langle\lambda\rangle = \langle h_\nu, \lambda\rangle, \ \ \nu = 0,1,2, \ (\mathrm{E}\theta_T\langle\lambda\rangle)^2 = \langle S_T(\theta)\lambda, \lambda\rangle,$$

$$C_T(\theta) = (T\mathrm{E}(\hat{\theta}_{iT} - \theta_i)(\hat{\theta}_{jT} - \theta_j))_{i,j=1}^{q},$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток двох векторів, $C_T(\theta)$ — матриця середньоквадратичних відхилень нормованої оцінки найменших квадратів $\hat{\theta}_T$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови I, II для $k = 4$, III, IV. Тоді при $m \geq 5$

$$\mathrm{E}\,\theta_T\langle\lambda\rangle = \Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\left(\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\Lambda^{i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_4}\Psi_{(i_3)(i_5)} \right)\lambda_i T^{-1/2} + l_T\langle\lambda\rangle, \qquad (10)$$

при $m \geq 6$

$$\langle C_T(\theta)\lambda, \lambda\rangle =$$

$$= \langle \Lambda^{(1)}\lambda, \lambda\rangle + \langle \Lambda^{(2)} T^{-1}\lambda, \lambda\rangle + \langle \Lambda^{(3)}\lambda, \lambda\rangle, \qquad (11)$$

де

(1) коефіцієнти лінійної форми $l_T\langle\lambda\rangle$ є величинами порядку $O(T^{-3/2}\log^2 T)$;

(2) елементи матриці $\Lambda^{(3)}$ є величинами порядку $O(T^{-3/2}\log^{5/2} T)$;

(3) $\Lambda^{(1)} = (\Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Psi_{(i_1)(j_1)})_{i,j=1}^{q}$; (12)

$$\Lambda^{(2)} = (\Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Lambda^{i_2 i_3}\Lambda^{j_2 j_3}((\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1 i_2)(j_1 j_2)}\Psi_{(i_3)(j_3)} + \Psi_{(j_1 j_2)(i_5)}\Psi_{(i_3)(j_3)}) -$$

$$-\frac{1}{4}\Lambda^{j_4 j_5} a_{j_1 j_2 j_4}(\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}\Psi_{(j_3)(j_5)} + \Psi_{(i_1 i_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(j_5)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1 i_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(j_1 j_2)}) - \frac{1}{4}\Lambda^{i_4 i_5} a_{i_1 i_2 i_4}(\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(i_5)} +$$

$$+ \Psi_{(j_1 j_2)(i_3)}\Psi_{(j_3)(i_5)} + \Psi_{(i_1 i_2)(j_5)}\Psi_{(j_3)(i_3)}) +$$

$$+\frac{1}{16}\Lambda^{i_4 i_5}\Lambda^{j_4 j_5} a_{i_1 i_2 i_4} a_{j_1 j_2 j_4}(\Psi_{(i_3)(j_3)}\Psi_{(i_5)(j_5)} +$$

$$+ \Psi_{(i_3)(j_5)}\Psi_{(i_5)(j_3)} + \Psi_{(i_3)(i_5)}\Psi_{(j_3)(j_5)})) +$$

$$+ \Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Lambda^{j_2 j_3}\Lambda^{j_4 j_5}(\Psi_{(i_1)(j_1 j_2 j_4)}\Psi_{(j_3)(j_5)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1)(j_3)}\Psi_{(j_1 j_2 j_4)(j_5)} + \Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_1 j_2 j_4)(j_3)} +$$

$$+ 2(\Psi_{(i_1)(j_1 j_5)}\Psi_{(j_2 j_4)(j_3)} + \Psi_{(i_1)(j_2 j_4)}\Psi_{(j_1 j_5)(j_3)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1)(j_3)}\Psi_{(j_1 j_5)(j_2 j_4)}) - \Lambda^{j_6 j_7}\left(\frac{1}{6} a_{j_1 j_2 j_4 j_6}(\Psi_{(i_1)(j_3)} \times \right.$$

$$\times \Psi_{(j_5)(j_7)} + \Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_3)(j_7)} + \Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_3)(j_7)}\Big) +$$

$$+\frac{1}{2} a_{j_2 j_4 j_6}(\Psi_{(i_1)(j_1 j_3)}\Psi_{(j_5)(j_7)} + \Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_1 j_3)(j_7)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_1 j_3)(j_5)}) + a_{j_1 j_2 j_6}(\Psi_{(i_1)(j_3 j_4)}\Psi_{(j_5)(j_7)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_3 j_4)(j_7)} + \Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_3 j_4)(j_5)}) - \frac{1}{4}\Lambda^{j_8 j_9} \times$$

$$\times a_{j_1 j_2 j_8} a_{j_3 j_4 j_6}(\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_7)(j_9)} +$$

$$+ \Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_5)(j_9)} + \Psi_{(i_1)(j_9)}\Psi_{(j_5)(j_7)}))))_{i,j=1}^{q}; \quad (13)$$

Доведення. Скориставшись теоремою 1, запишемо:

$$\theta_T\langle\lambda\rangle = h_0\langle\lambda\rangle +$$

$$+ h_1\langle\lambda\rangle T^{-1/2} + h_2\langle\lambda\rangle T^{-1} + \xi_3\langle\lambda\rangle T^{-3/2}. \quad (14)$$

$$\theta_T^2\langle\lambda\rangle = h_0^2\langle\lambda\rangle + 2h_0\langle\lambda\rangle h_1\langle\lambda\rangle T^{-1/2} +$$

$$+ (h_1^2\langle\lambda\rangle + 2h_0\langle\lambda\rangle h_2\langle\lambda\rangle)T^{-1} + \xi_3^*\langle\lambda\rangle T^{-3/2}, \quad (15)$$

де

$$\xi_3^*\langle\lambda\rangle = 2h_0\langle\lambda\rangle\xi_3\langle\lambda\rangle + 2h_1\langle\lambda\rangle h_2\langle\lambda\rangle +$$

$$+ (h_2^2\langle\lambda\rangle + 2h_1\langle\lambda\rangle\xi_3\langle\lambda\rangle)T^{-1/2} +$$

$$+ 2h_2\langle\lambda\rangle\xi_3\langle\lambda\rangle T^{-1} + \xi_3^2\langle\lambda\rangle T^{-3/2}.$$

Нехай $s = 1, 2$. Тоді

$$\theta_T^s\langle\lambda\rangle = \sum_{l=0}^{2} h_{ls}^*\langle\lambda\rangle T^{-l/2} + h_{3s}^*\langle\lambda\rangle T^{-3/2}, \quad (16)$$

де

$$h_{l1}^*\langle\lambda\rangle = h_l\langle\lambda\rangle, l = 0,1,2, \quad h_{02}^*\langle\lambda\rangle = h_0^2\langle\lambda\rangle,$$

$$h_{12}^*\langle\lambda\rangle = 2h_0\langle\lambda\rangle h_1\langle\lambda\rangle, \quad h_{22}^*\langle\lambda\rangle = 2h_0\langle\lambda\rangle h_2\langle\lambda\rangle + h_1^2\langle\lambda\rangle,$$

$$h_{31}^*\langle\lambda\rangle = \xi_3\langle\lambda\rangle, \quad h_{32}^*\langle\lambda\rangle = \xi_3^*\langle\lambda\rangle.$$

Коефіцієнти $h_{3,r}^*(\theta)$, $|r| = s$ многочлена $h_{3s}^*\langle\lambda\rangle$ мають таку властивість: можна знайти таке число $\delta > 0$, що для деякої константи $C_5(s) < \infty$ виконується співвідношення (див. [1, с. 157])

$$P\{\max_{|r|=s} |h_{3,r}^*(\theta)| \geq C_5(s)\log^{\delta} T\} = O(T^{-m/2}), \quad (17)$$

причому $\delta = 2$ для $s = 1$ і $\delta = \frac{5}{2}$ для $s = 2$.

Позначимо M_{l+s}, $l = 0,1,2$, множину векторів μ з цілими координатами $\mu_\alpha \geq 0$, $|\alpha| = 1,\ldots,l+1$, для яких $\sum_{|\alpha|=1}^{l+1}\mu_\alpha = l+s.$ Тоді коефіцієнти $h_{l,r}^*(\theta)$, $|r| = s$ многочлена $h_{ls}^*\langle\lambda\rangle$, $l = 0,1,2; s = 1,2$, мають представлення (див. [1, с. 158]):

$$h_{l,r}^*(\theta) = \sum_{\mu\in \mathrm{M}_{l+s}} C_{\mu,r}(\theta)\prod_{|\alpha|=1}^{l+1} b^{\mu_\alpha}(\alpha, 0). \quad (18)$$

Введемо подію

$$W_T(\theta) = \{\max_{|r|=s} |h_{3,r}^*(\theta)| < C_5(s)\log^{s} T\}.$$

Нехай $\chi\{A\}$ – індикатор події A, $\bar{\chi} = 1 - \chi$.

Помножимо ліву і праву частини рівності (16) на $\chi\{W_T(\theta)\}$ і візьмемо математичне сподівання. Тоді

$$\mathrm{E}\chi\{W_T(\theta)\}\theta_T^s\langle\lambda\rangle =$$

$$= \sum_{l=0}^{2}\mathrm{E}\chi\{W_T(\theta)\}h_{ls}^*\langle\lambda\rangle T^{-l/2} + h_s^{(1)}\langle\lambda\rangle, \quad (19)$$

де $h_s^{(1)}\langle\lambda\rangle$ – многочлен, коефіцієнти якого є величинами порядку $O(T^{-3/2}\log^{\delta} T)$ рівномірно по θ.

Оцінимо математичні сподівання

$$\mathrm{E}\bar{\chi}\{W_T(\theta)\}h_{ls}^*\langle\lambda\rangle, \ l = 0,1,2.$$

Зафіксуємо l. Рівність (18) показує, що достатньо оцінити математичне сподівання

$$\mathrm{E}\bar{\chi}\{W_T(\theta)\}\prod_{|\alpha|=1}^{l+1} b^{\mu_\alpha}(\alpha, 0), \ \mu \in \mathrm{M}_{l+s}.$$

Оскільки

$$\left|\prod_{|\alpha|=1}^{l+1} b^{\mu_\alpha}(\alpha, 0)\right| \leq \left(\sum_{|\alpha|=1}^{l+1} b^2(\alpha, 0)\right)^{\frac{l+s}{2}},$$

то достатньо оцінити

$$\mathrm{E}\overline{\chi}\{W_T(\theta)\}|b(\alpha,0)|^{l+s}$$

для фіксованого α, $1 \le |\alpha| \le l+1$. Позначимо $\sigma^2_{\alpha T} = \mathrm{E}(b^{(\alpha)}(\theta))^2$.

За умови I випадковий процес ε має неперервну та обмежену спектральну щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Нехай $f_0 = \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^1} f(\lambda) < \infty$. Тоді

$$\sigma^2_{\alpha T} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)T^{-1}\left|\int_0^T e^{i\lambda t} g^{(\alpha)}(t)dt\right|^2 d\lambda \le$$

$$\le 2\pi f_0 T^{-1}\int_z^T (g^{(\alpha)}(t,\theta))^2 dt \le 4\pi f_0 (2T)^{-1} d^2_{2T}(\alpha,0) \le$$

$$\le 4\pi f_0 C_1^2(\alpha) < \infty$$

за умови (2).

Для деякого $u > 1$ позначимо

$$\gamma_{jT} = \sigma_{\alpha T}(\theta)(u^j + m)^{1/2}\log^{1/2}T,\ j \ge 0, \qquad (20)$$

і введемо події

$$W^{(0)}_{\alpha T} = \{|b^{(\alpha)}(\theta)| < \gamma_{0T}\};$$

$$W^{(j)}_{\alpha T} = \{\gamma_{j-1,T} \le |b^{(\alpha)}(\theta)| < \gamma_{jT}\},\ j \ge 1.$$

Тоді

$$\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\overline{\chi}\{W_T\} = \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(j)}_{\alpha T}\}\overline{\chi}\{W_T\} \le$$

$$\le \mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(0)}_{\alpha T}\}\overline{\chi}\{W_T\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(j)}_{\alpha T}\}. \qquad (21)$$

Використовуючи (19) і (20), отримуємо оцінку для 1-го доданка правої частини (21):

$$\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(0)}_{\alpha T}\}\overline{\chi}\{W_T\} \le$$

$$\le \sigma^{\nu+1}_{\alpha T}(\theta)(1+m)^{\frac{\nu+1}{2}}\log^{\frac{\nu+1}{2}}T\cdot P\{\overline{W}_T\} = \qquad (22)$$

$$= O(T^{-\frac{m}{2}}\log^{\frac{\nu+1}{2}}T).$$

Для 2-го доданка правої частини (21) маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(j)}_{\alpha T}\} \le$$

$$\le \sigma^{\nu+1}_{\alpha T}(\theta)\log^{\frac{\nu+1}{2}}T\sum_{j=1}^{\infty}(u^j+m)^{\frac{\nu+1}{2}} \times$$

$$\times P\{|b^{(\alpha)}(\theta)| \ge \sigma_{\alpha T}(\theta)(u^{j-1}+m)^{1/2}\log^{1/2}T\}. \qquad (23)$$

За нерівністю (див., наприклад, [1])

$$\int_{\Delta}^{\infty} e^{\frac{-v^2}{2}}dv \le \Delta^{-1}e^{\frac{-\Delta^2}{2}},\quad \Delta > 0,$$

що застосовується до $\Delta = (u^{j-1}+m)^{1/2}\log^{1/2}T$, запишемо

$$P\{|b^{(\alpha)}(\theta)| \ge \sigma_{\alpha T}(\theta)(u^{j-1}+m)^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{1}{2}}T\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(u^{j-1}+m)^{\frac{-1}{2}}\log^{\frac{-1}{2}}T \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(u^{j-1}+m)\log T\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{j-1}{2}}\log^{-\frac{1}{2}}T\cdot T^{-m/2}\cdot T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}},\ j \ge 1. \qquad (24)$$

З (23) і (24) отримуємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(j)}_{\alpha T}\} \le \sigma^{\nu+1}_{\alpha T}(\theta)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{\nu}{2}}T \times$$

$$\times T^{-\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}(u^j+m)^{\frac{\nu+1}{2}}u^{-\frac{j-1}{2}}T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}}. \qquad (25)$$

Оцінимо ряд у правій частині (25). Оскільки існує таке j_0, що $\frac{1}{2}u^{j-1} \ge ju^{\frac{\nu}{2}}$ для $j > j_0$, то і $T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}} \ge T^{-ju^{\frac{\nu}{2}}}$ для тих самих j. Таким чином,

$$\left(\sum_{j=1}^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty}\right)(u^j+m)^{\frac{\nu+1}{2}}u^{-\frac{j-1}{2}}T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

причому $\sum_1 = O(T^{-1/2})$,

$$\sum\nolimits_2 \le C_5(s)u^{1/2}\sum_{j=j_0+1}^{\infty}(u^{\nu/2}T^{-u^{\nu/2}}) =$$

$$= C_5(s)u^{1/2}\rho^{j_0+1}T^{-\rho(j_0+1)}(1-\rho T^{-\rho})^{-1},\ \rho = u^{\nu/2}.$$

Це означає, що $\sum_2 = o(T^{-1/2})$ і

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\chi\{W^{(j)}_{\alpha T}\} = O\left(T^{-\frac{m+1}{2}}\log^{\nu/2}T\right). \qquad (26)$$

Співвідношення (21), (22), (25) і (26) показують, що

$$\mathrm{E}|b^{(\alpha)}(\theta)|^{\nu+1}\overline{\chi}\{W_T\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\log^{\frac{\nu+1}{2}}T\right). \quad (27)$$

Оцінимо тепер $\mathrm{E}\,\overline{\chi}\{W_T(\theta)\}|\theta_T\langle\lambda\rangle|^s$, $s=1,2$. Для цього достатньо оцінити математичне сподівання

$$T^{\frac{s}{2}}\mathrm{E}\,\overline{\chi}\{W_T(\theta)\}\|\hat{\theta}_T-\theta\|^s.$$

Для деяких $u>1$ і $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ покладемо

$$W_{0T}^* = \{\|\hat{\theta}_T-\theta\|<T^{-\beta}\};$$

$$W_{jT}^* = \{u^{j-1}T^{-\beta}\le\|\hat{\theta}_T-\theta\|<u^jT^{-\beta}\},\ j\ge 1. \quad (28)$$

Тоді

$$T^{\frac{s}{2}}\mathrm{E}\|\hat{\theta}_T-\theta\|^s\overline{\chi}\{W_T\}\le$$

$$\le T^{\frac{s}{2}}\mathrm{E}\|\hat{\theta}_T-\theta\|^s\overline{\chi}\{W_T\}\chi\{W_{0T}^*\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}T^{\frac{s}{2}}\mathrm{E}\|\hat{\theta}_T-\theta\|^s\chi\{W_{jT}^*\}=\mathrm{E}_1+\mathrm{E}_2. \quad (29)$$

Для 1-го доданка отримуємо

$$\mathrm{E}_1\le T^{\frac{s}{2}-\beta s}P\{\overline{W}_T\}=O\left(T^{-\frac{m-s}{2}-\beta s}\right). \quad (30)$$

Оцінимо 2-й доданок, використовуючи умову IV при $M=u^{j-1}T^{\frac{s}{2}-\beta}$, $j\ge 1$:

$$\mathrm{E}_2\le T^{\frac{s}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}(u^jT^{-\beta})^sP\{\|\hat{\theta}_T-\theta\|\ge u^{j-1}T^{-\beta}\}\le$$

$$\le C_6T^{\frac{s}{2}-s\beta}\sum_{j=1}^{\infty}u^{sj-(m-1)j}T^{-m\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}=$$

$$=C_6\frac{u^m}{u^{m-2}-1}T^{-(m-s)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}. \quad (31)$$

Оскільки при $m\ge 1$ виконується нерівність $\frac{m-s}{2}+\beta s>(m-s)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)$, то, підставляючи оцінки (30) і (31) у (29), отримуємо

$$T^{\frac{s}{2}}\mathrm{E}\|\hat{\theta}_T-\theta\|^s\chi\{\overline{W}_T\}=O\left(T^{-(m-s)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\right). \quad (32)$$

Зібравши оцінки залишкових членів (19), (27) і (32), знайдемо такі значення m, щоб найгрубіший порядок був не меншим порядка залишкового члена у рівності (19). Для цього запишемо розв'язок нерівності $m(1-2\beta)-s+2s\beta>3$ у вигляді $m=3+s+n$, де натуральне число $n>\frac{6\beta}{1-2\beta}$. Якщо $n=1$, то $\beta<\frac{1}{8}$ і так далі. Таким чином, при $m\ge 5$ виконується пункт (1), а при $m\ge 6$ — пункт (2) теореми 2.

Використовуючи формули (6)–(8), знайдемо в явному вигляді математичні сподівання в розкладах (14) і (15). Оскільки будь-який непарний змішаний момент значень гауссового процесу $\varepsilon(t)$ дорівнює нулю, а змішаний момент 4-го порядку можна обчислити за формулою Іcерліса (див., наприклад, [9]), то

$$\mathrm{E}\,b_i(\theta)=0,\ \ \mathrm{E}\,b_i(\theta)b_j(\theta)b_k(\theta)=0,$$

$$\mathrm{E}\,b_ib_jb_kb_l=\Psi_{(i)(j)}\Psi_{(k)(l)}+\Psi_{(i)(k)}\Psi_{(j)(l)}+\Psi_{(i)(l)}\Psi_{(j)(k)}.$$

Таким чином,

$$\mathrm{E}h_0\langle\lambda\rangle=\lambda_i\Lambda^{ii_1}\mathrm{E}b_{i_1}=0;$$

$$\mathrm{E}\,h_1\langle\lambda\rangle=\lambda_i\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2i_3}\left(\Psi_{(i_1i_2)(i_3)}-\frac{1}{4}\Lambda^{i_4i_5}a_{i_1i_2i_4}\Psi_{(i_3)(i_5)}\right);$$

$$\mathrm{E}h_2\langle\lambda\rangle=0;\ \mathrm{E}h_0^2\langle\lambda\rangle=\lambda_i\lambda_j\Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Psi_{(i_1)(j_1)};$$

$$\mathrm{E}\,h_0\langle\lambda\rangle h_1\langle\lambda\rangle=0;$$

$$\mathrm{E}\,h_0\langle\lambda\rangle h_2\langle\lambda\rangle=\lambda_i\lambda_j[\Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Lambda^{j_2j_3}\Lambda^{j_4j_5}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}(\Psi_{(i_1)(j_1j_2j_4)}\Psi_{(j_3)(j_5)}+\Psi_{(i_1)(j_3)}\Psi_{(j_1j_2j_4)(j_5)}\right.$$

$$\left.+\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_1j_2j_4)(j_3)}\right)+(\Psi_{(i_1)(j_1j_5)}\Psi_{(j_2j_4)(j_3)}+$$

$$+\Psi_{(i_1)(j_2j_4)}\Psi_{(j_1j_5)(j_3)}+\Psi_{(i_1)(j_3)}\Psi_{(j_1j_5)(j_2j_4)})-$$

$$-\frac{1}{2}\Lambda^{j_6j_7}\left(\frac{1}{6}a_{j_1j_2j_4j_6}(\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_7)(j_3)}+\Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_5)(j_3)}+\right.$$

$$\left.+\Psi_{(i_1)(j_3)}\Psi_{(j_5)(j_7)}\right)+\frac{1}{2}a_{j_2j_4j_6}(\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_7)(j_1j_3)}+$$

$$
\begin{gathered}
+\Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_5)(j_1 j_3)}+\Psi_{(i_1)(j_1 j_3)}\Psi_{(j_5)(j_7)})+ \\
+a_{j_1 j_2 j_6}(\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_7)(j_3 j_4)}+\Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_5)(j_3 j_4)}+ \\
+\Psi_{(i_1)(j_3 j_4)}\Psi_{(j_5)(j_7)})-\frac{1}{4}\Lambda^{j_8 j_9}a_{j_1 j_2 j_8}a_{j_3 j_4 j_6}\times \\
\times(\Psi_{(i_1)(j_5)}\Psi_{(j_7)(j_9)}+\Psi_{(i_1)(j_7)}\Psi_{(j_5)(j_9)}+ \\
+\Psi_{(i_1)(j_9)}\Psi_{(j_5)(j_7)})))];
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\,h_1^2\langle\lambda\rangle=\lambda_i\lambda_j\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\Lambda^{jj_1}\Lambda^{j_2 j_3}\times \\
\times((\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)}+\Psi_{(i_1 i_2)(j_1 j_2)}\Psi_{(i_3)(j_3)}+ \\
+\Psi_{(i_1 i_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(j_1 j_2)})-\frac{1}{4}\Lambda^{j_4 j_5}a_{j_1 j_2 j_4}(\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}\Psi_{(j_3)(j_5)}+ \\
+\Psi_{(i_1 i_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(j_5)}+\Psi_{(i_1 i_2)(j_5)}\Psi_{(i_3)(j_3)})- \\
-\frac{1}{4}\Lambda^{i_4 i_5}a_{i_1 i_2 i_4}(\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(i_5)}+\Psi_{(j_1 j_2)(i_3)}\Psi_{(j_3)(i_5)}+ \\
+\Psi_{(j_1 j_2)(i_5)}\Psi_{(j_3)(i_3)})+ \\
+\frac{1}{16}\Lambda^{i_4 i_5}\Lambda^{j_4 j_5}a_{i_1 i_2 i_4}a_{j_1 j_2 j_4}(\Psi_{(i_3)(i_5)}\Psi_{(j_3)(j_5)}+ \\
+\Psi_{(i_3)(j_3)}\Psi_{(i_5)(j_5)}+\Psi_{(i_3)(j_5)}\Psi_{(i_5)(j_3)})).
\end{gathered}
$$

Таким чином, підставивши одержані значення в (14) і (15), отримуємо (10) – асимптотичний розклад вектора зсуву оцінки найменших квадратів і (11) – асимптотичний розклад матриці $C_T(\theta)$.

***Наслідок* 1.** Якщо умови теореми 2 виконано для $k=3$, $m\ge 4$, то

$$
\begin{gathered}
\mathrm{E}\theta_T\langle\lambda\rangle=\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2 i_3}\left(\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}-\frac{1}{4}\Lambda^{i_4 i_5}a_{i_1 i_2 i_4}\Psi_{(i_3)(i_5)}\right)\times \\
\times\lambda_i T^{-1/2}+l_T^{(1)}\langle\lambda\rangle, \qquad (33)
\end{gathered}
$$

$$
\langle C_T(\theta)\lambda,\lambda\rangle=\langle\Lambda^{(1)}\lambda,\lambda\rangle+\langle\Lambda^{(4)}\lambda,\lambda\rangle, \qquad (34)
$$

де

(1) коефіцієнти лінійної форми $l_T^{(1)}\langle\lambda\rangle$ є величинами порядку $O(T^{-1}\log^2 T)$,

(2) елементи матриці $\Lambda^{(4)}$ є величинами порядку $O(T^{-1}\log^{\frac{5}{2}}T)$.

***Наслідок* 2.** Якщо умови теореми 2 виконано для $k=2$, $m\ge 3$, то

$$
\mathrm{E}\,\theta_T\langle\lambda\rangle=l_T^{(2)}\langle\lambda\rangle, \qquad (35)
$$

$$
\langle C_T(\theta)\lambda,\lambda\rangle=\langle\Lambda^{(1)}\lambda,\lambda\rangle+\langle\Lambda^{(5)}\lambda,\lambda\rangle, \qquad (36)
$$

де

(1) коефіцієнти лінійної форми $l_T^{(2)}\langle\lambda\rangle$ є величинами порядку $O(T^{-1/2}\log^2 T)$,

(2) елементи матриці $\Lambda^{(5)}$ є величинами порядку $O(T^{-1/2}\log^{5/2}T)$.

Асимптотичний розклад коваріаційної матриці нормованої оцінки найменших квадратів $\hat{\theta}_T$ можна записати у вигляді

$$
\begin{gathered}
D_T(\theta)=(T\mathrm{E}(\hat{\theta}_{iT}-\mathrm{E}\,\hat{\theta}_{iT})(\hat{\theta}_{jT}-\mathrm{E}\,\hat{\theta}_{jT}))_{i,j=1}^{q}= \\
=C_T(\theta)-S_T(\theta),
\end{gathered}
$$

де

$$
\begin{gathered}
S_T(\theta)=\Lambda^{ii_1}\Lambda^{jj_1}\Lambda^{i_2 i_3}\Lambda^{j_2 j_3}(\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)}\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)}- \\
-\frac{1}{4}(\Lambda^{i_4 i_5}a_{i_1 i_2 i_4}\Psi_{(j_1 j_2)(j_3)}\Psi_{(i_3)(i_5)}+ \\
+\Lambda^{j_4 j_5}a_{j_1 j_2 j_4}\Psi_{(j_3)(j_5)}\Psi_{(i_1 i_2)(i_3)})+ \\
+\frac{1}{16}\Lambda^{i_4 i_5}\Lambda^{j_4 j_5}a_{i_1 i_2 i_4}a_{j_1 j_2 j_4}\Psi_{(i_3)(i_5)}\Psi_{(j_3)(j_5)})T^{-1}+ \\
+O(T^{-2}\log^2 T).
\end{gathered}
$$

Висновки

У статті розглянуто асимптотичну поведінку зсуву і коваріаційної матриці оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом та гауссовим стаціонарним шумом. Отримано явний вигляд перших членів асимптотичного розкладу цих числових характеристик оцінки.

Для доведення основних результатів використовувались теорема про стохастичний розклад оцінки найменших квадратів (тобто про представлення цієї оцінки у вигляді суми векторних многочленів від стандартних інтегралів від випадкового шуму, зваженого похідними функції регресії, і стохастично малого залишкового члена), а також теорема про ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів.

Одержані результати дають змогу відповісти на важливе в застосуваннях питання про асимптотичну поведінку перших і других моментів асимтотично нормальної оцінки найменших квадратів векторного параметра нелінійної моделі регресії.

Проведені дослідження є перспективними і можуть бути продовжені в багатьох напрямах. Зокрема, можна розглянути інші нормування оцінки найменших квадратів, інші математичні моделі випадкового шуму тощо.

Список літератури

1. *A.V. Ivanov and N.N. Leonenko,* Statistical Analysis of Random Fields. Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989, 244 p.
2. *N.N. Leonenko,* Limit Theorems for Random Fields with Singular Spectrum. Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1999, 401 p.
3. *A.V. Ivanov and N.N. Leonenko,* "Robust Estimators in Non-linear Regression Models with Long-Range Dependence", Springer Optimization and its Applications, vol. 28, pp. 193–221, 2009.
4. *Іванов О.В., Савич І.М.* Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера–Бассета параметра регресії з сильно залежним шумом // Укр. мат. журнал. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1030–1052.
5. *A.V. Ivanov et al.,* "Limit Theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra", The Annals of Probability, vol. 41, no. 2, pp. 1088–1114, 2013.
6. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. – 528 с.
7. *A.V. Ivanov,* Asymtotic Theory of Nonlinear Regression. Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1997, 327 p.
8. *G.P.Y. Clarke,* "Moments of the Least Squares Estimators in a Nonlinear Regression Model", J. Roy. Statist. Soc. B, vol. 42, pp. 227–237, 1980.
9. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 656 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 січня 2014 року