УДК 519.21

Т.М. Грозян

ОЦІНКИ ДЛЯ МОМЕНТІВ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ СУПЕРАДИТИВНОЮ МОМЕНТНОЮ ФУНКЦІЄЮ

This paper considers the stochastic process with superadditive moment function. The aim is to generalize the results of R. Serfling, which he received for a sequence of random variables with superadditive moment function. We have obtained the estimation for moments of supremum of a random process with the appropriate bounds for moments of this random process. We make no assumptions about the structure of the dependence of increments of a random process, but only the estimation for moments of random process. The estimates for supremum of the stochastic process with orthogonal increments and quasi-stationary process were obtained as a consequence of the main theorem. Also estimates for such random processes were considered under given estimates for moments. The technique of proof relies on the classical method of binary partitions that have been developed for orthogonal series and generalized to quasi-stationary sequences of random variables by R. Serfling. It should be mentioned, that unlike the case of random variables there appears a certain constant in the estimation of stochastic processes, but it has no significant impact on further research.

Keywords: maximum estimates, superadditive moment function, the process with orthogonal increments, quasi-stationary process.

Вступ

Випадкові процеси із супердитивною моментною функцією широко застосовуються в теорії ймовірностей. Одним із прикладів таких процесів є процеси з ортогональними приростами, які використовуються у спектральних розкладах стаціонарних процесів.

У запропонованій статті ми переносимо результати, які отримав Р. Серфлінг [1] для випадкових величин із супердитивною моментною функцією, на випадок випадкових процесів з аналогічними властивостями.

Одним із головних результатів роботи Р. Серфлінга [1] є оцінка для моментів максимуму сум випадкових величин із суперадитивною моментною фукнцією. Його результати узагальнюють класичний результат Д. Меньшова та Х. Радемахера [2] для взаємно ортогональних випадкових величин зі скінченними дисперсіями. Р. Серфлінг [1] отримав оцінки для більш загального класу випадкових величин і покращив, зокрема, цей результат. Дослідження Р. Серфлінга [1] було розвинено в працях [3–10].

У цій роботі ми узагальнюємо результати Серфлінга на випадок випадкових процесів із суперадитивною моментною функцією. Ми отримуємо аналогічну оцінку для моментів екстремальних значень інтегралів від випадкового процесу, використовуючи оцінку для відповідних моментів інтегралів для подальшого дослідження граничної поведінки вихідного випадкового процесу. Ми не робимо ніяких припущень щодо структури залежності приростів випадкового процесу, крім оцінки для моментів відповідних інтегралів.

На відміну від випадкових величин, при дослідженні випадкових процесів в оцінці з'являється певна константа. Але оскільки в подальшому ми досліджуємо умови виконання підсиленого закону великих чисел, то точна величина константи не має особливого значення.

Постановка задачі

Мета роботи – оцінити зверху моменти супремуму випадкового процесу, спираючись на оцінку для моментів досліджуваного випадкового процесу.

Процеси із суперадитивною моментною функцією

Розглянемо випадковий процес $X_t,\ t \geq 0$. Припустимо, що процес X_t є інтегровним на кожному скінченному інтервалі. Позначимо

$$S_{a,b} = \int_a^{a+b} X_t dt,\ a > 0, b > 0,$$

$$M_{a,B} = \sup_{b \leq B} |S_{a,b}|,\ a > 0, B > 0.$$

Означення. Випадковий процес $X_t,\ t \geq 0$ має суперадитивну моментну функцію порядку $r > 0$ з параметром $\gamma > 1$, якщо існує невід'ємна функція $g(a,b)$ така, що для довільних $a>0, b>0, c>0$

$$g(a,b)+g(a+b,c)\le g(a,b+c) \qquad (1)$$

і

$$E|S_{a,b}|^{r}\le g^{\gamma}(a,b). \qquad (2)$$

Теорема. Нехай $\nu\ge 2$. Припустимо, що випадковий процес $X_t,\ t\ge 0$ має суперадитивну моментну функцію порядку ν з параметром $\frac{\nu}{2}$, тобто

$$E|S_{a,b}|^{\nu}\le g^{\frac{\nu}{2}}(a,b),\ (\forall a>0, b\ge 1).$$

Крім того, нехай

$$\alpha=\inf_{a>0} g(a,1)>0,\ \ \beta=\sup_{a>0} EM_{a,2}^{\nu}<\infty.$$

Тоді

$$EM_{a,b}^{\nu}\le C(\log_2 2b)^{\nu} g^{\frac{\nu}{2}}(a,b)\ (\forall a>0, b\ge 1), \qquad (3)$$

де $C=\max\left\{1,\frac{\beta}{\alpha^{\frac{\nu}{2}}}\right\}$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1. Розглянемо випадок, коли $1\le b<2$. Оскільки функція g монотонно зростає за другим аргументом, то для довільного $a>0$

$$EM_{a,b}^{\nu}\le EM_{a,2}^{\nu}\le \sup_{a>0} EM_{a,2}^{\nu}\le$$

$$\le (\log_2 2b)^{\nu}\left(\frac{g(a,b)}{\inf\limits_{a>0} g(a,1)}\right)^{\frac{\nu}{2}} \sup_{a>0} EM_{a,2}^{\nu}=$$

$$=\frac{\beta}{\alpha^{\frac{\nu}{2}}}(\log_2 2b)^{\nu} g^{\frac{1}{2}\nu}(a,b)\le C(\log_2 2b)^{\nu} g^{\frac{1}{2}\nu}(a,b).$$

2. Тепер розглянемо випадок, коли $b\ge 2$. Нехай теорема справедлива для деякого $n\ge 0$ і всіх $2^n\le b<2^{n+1}$. Доведемо теорему для всіх $2^{n+1}\le b<2^{n+2}$. Покладемо $d=\frac{1}{2}b$. Тоді $2^n\le d<2^{n+1}$, і для довільного $d\le b'\le b$ маємо

$$S_{a,b'}^2=(S_{a,d}+S_{a+d,b'-d})^2=$$

$$=S_{a,d}^2+S_{a+d,b'-d}^2+2S_{a,d}S_{a+d,b'-d},$$

звідки випливає

$$S_{a,b'}^2\le M_{a,d}^2+M_{a+d,b'-d}^2+2|S_{a,d}|M_{a+d,b'-d}.$$

У випадку, коли $b'<d$, справедлива нерівність $S_{a,b'}^2\le M_{a,d}^2$, звідки випливає, що для довільного $2^n\le b<2^{n+1}$

$$M_{a,b}^2\le M_{a,d}^2+M_{a+d,b-d}^2+2|S_{a,d}|M_{a+d,b-d}.$$

З нерівності Мінковського випливає

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}}\le$$

$$\le [E(M_{a,d}^2+M_{a+d,b-d}^2+2|S_{a,d}|M_{a+d,b-d})^{\frac{\nu}{2}}]^{\frac{2}{\nu}}\le$$

$$\le [EM_{a,d}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}}+[EM_{a+d,b-d}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}}+$$

$$+\,2[E(|S_{a,d}|M_{a+d,b-d})^{\frac{\nu}{2}}]^{\frac{2}{\nu}}.$$

Позначимо

$$f(b)=\log_2^2 2b,\ b>1.$$

Оскільки $b-d\in[2^n,2^{n+1})$, то з припущення індукції та нерівності Шварца випливає

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}}\le C^{\frac{2}{\nu}}\log_2^2(2d)g(a,d)+$$

$$+\,C^{\frac{2}{\nu}}\log_2^2(2(b-d))g(a+d,b-d)+$$

$$+\,2([E|S_{a,d}|^{\nu}]^{\frac{1}{2}}[EM_{a+d,b-d}^{\nu}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{\nu}}\le$$

$$\le C^{\frac{2}{\nu}}f(d)g(a,d)+C^{\frac{2}{\nu}}f(b-d)g(a+d,b-d)+$$

$$+\,2(E|S_{a,d}|^{\nu})^{\frac{1}{\nu}}C^{\frac{1}{\nu}}f^{\frac{1}{2}}(b-d)\,g^{\frac{1}{2}}(a+d,b-d).$$

З властивості (1) і того, що $f(b-d)=f(d)$, випливає

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}}\le C^{\frac{2}{\nu}}f(d)g(a,b)+$$

$$+\,2f^{\frac{1}{2}}(d)(E|S_{a,d}|^{\nu})^{\frac{1}{\nu}}C^{\frac{1}{\nu}}g^{\frac{1}{2}}(a+d,b-d).$$

Використовуючи нерівності $2AB \le A^2 + B^2$ і $C \ge 1$, маємо

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}} \le C^{\frac{2}{\nu}}(f(d)g(a,b) +$$

$$+ f^{\frac{1}{2}}(d)((E|S_{a,d}|^{\nu})^{\frac{2}{\nu}} + g(a+d, b-d))).$$

Із властивостей (1), (2) випливає

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}} \le C^{\frac{2}{\nu}}(f(d)g(a,b) +$$

$$+ f^{\frac{1}{2}}(d)(g(a,d) + g(a+d, b-d))) \le$$

$$\le C^{\frac{2}{\nu}}(f(d) + f^{\frac{1}{2}}(d))\, g(a,b).$$

Зауважимо, що

$$f(d) + f^{\frac{1}{2}}(d) \le f(b).$$

Тому

$$[EM_{a,b}^{\nu}]^{\frac{2}{\nu}} \le C^{\frac{2}{\nu}} f(b)\, g(a,b),$$

звідки випливає (3).

Процеси з ортогональними приростами

Нехай $X_t, t \ge 0$, – процес з ортогональними приростами, тобто виконується співвідношення $E(X_b - X_a)(X_d - X_c) = 0$ для довільних $0 \le a < b < c < d < \infty$. Тоді

$$ES_{a,b}^2 = E\int_a^{a+b} X_t dt \int_a^{a+b} X_s ds = \int_a^{a+b}\int_a^{a+b} EX_t X_s dt ds =$$

$$= \int_a^{a+b}\int_a^{s} EX_t X_s dt ds + E\int_a^{a+b}\int_a^{t} EX_t X_s ds dt =$$

$$= 2\int_a^{a+b}\int_a^{s}(E(X_s - X_t)X_t + EX_t^2)\, dt ds =$$

$$= 2\int_a^{a+b}\int_a^{s} EX_t^2 dt ds = 2\int_a^{a+b}\int_t^{a+b} EX_t^2 ds dt =$$

$$= 2\int_a^{a+b}(a+b-t)\, EX_t^2 dt.$$

Позначимо

$$g(a,b) = 2\int_a^{a+b}(a+b-t)EX_t^2 dt.$$

Перевіримо, чи функція $g(a,b)$ є суперадитивною моментною функцією для процесу X_t. Для цього потрібно перевірити властивості (1) і (2):

(1) $ES_{a,b}^2 = 2\int_a^{a+b}(a+b-t)EX_t^2 dt.$

(2) Для довільних $b, c > 0$:

$$g(a,b) + g(a+b,c) = 2\int_a^{a+b}(a+b-t)EX_t^2 dt +$$

$$+ 2\int_{a+b}^{a+b+c}(a+b+c-t)EX_t^2 dt \le$$

$$\le 2\left(\int_a^{a+b}(a+b+c-t)EX_t^2 dt + \right.$$

$$\left. + \int_{a+b}^{a+b+c}(a+b+c-t)EX_t^2 dt\right) =$$

$$= 2\int_a^{a+b+c}(a+b+c-t)EX_t^2 dt = g(a, b+c).$$

Отже, функція $g(a,b)$ є суперадитивною моментною функцією другого порядку для процесу X_t, і ми отримали такий результат.

***Наслідок* 1.** Нехай $X_t, t \ge 0$, – процес з ортогональними приростами. Тоді

$$EM_{a,b}^2 \le 2C\log_2^2 2b\int_a^{a+b}(a+b-t)EX_t^2 dt,$$

де $C = \max\left\{1, \frac{\sup_{a>0} EM_{a,2}^2}{\inf_{a>0} g(a,1)}\right\}$.

Розглянемо частинний випадок, коли $EX_t^2 = At^{\alpha}, \alpha > 0, A$ – деяка константа.

***Наслідок* 2.** Нехай $EX_t^2 = At^{\alpha}, \alpha > 0, A$ – деяка константа, тоді

$$EM_{a,b}^2 \le 2Ab^2C(\alpha+1)(a+b)^{\alpha}\log_2^2 2b, \qquad (4)$$

де $C = \max\left\{1, \frac{\sup_{a>0} EM_{a,2}^2}{\inf_{a>0} g(a,1)}\right\}$.

Доведення. За таких умов функція $g(a,b)$ матиме вигляд

$$g(a,b) = 2\int_a^{a+b}(a+b-t)At^{\alpha}dt =$$

$$= \frac{2A(a+b)((a+b)^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})}{\alpha+1} -$$

$$- \frac{2A((a+b)^{\alpha+2} - a^{\alpha+2})}{\alpha+2} \le 2Ab(a+b)^{\alpha+1} - 2Aba^{\alpha+1} \le$$

$$\leq 2Ab^2(\alpha+1)(a+b)^{\alpha},$$

звідки отримаємо (4).

Квазістаціонарний випадковий процес

Назвемо випадковий процес $X_t,\ t \geq 0$, квазістаціонарним, якщо

$$EX_tX_s \leq \rho(t-s),\ t,s \geq 0,$$

де ρ — інтегровна на довільному скінченному інтервалі функція.

Для кожного квазістаціонарного процесу виконується

$$ES_{a,b}^2 = E\int_a^{a+b}X_t dt\int_a^{a+b}X_s ds = \int_a^{a+b}\int_a^{a+b}EX_tX_s dtds \leq$$

$$\leq \int_a^{a+b}\int_a^{a+b}\rho(t-s)dtds = \int_a^{a+b}\int_{a-s}^{a+b-s}\rho(u)duds =$$

$$= \int_0^b \rho(u)\int_{a-u}^{a+b-u}dsdu = b\int_0^b\rho(u)du.$$

Позначимо

$$g(a,b) = b\int_0^b\rho(u)du.$$

Перевіримо, чи задовольняє функція $g(a,b)$ умови (1) і (2):

(1) $ES_{a,b}^2 \leq b\int_0^b EX_u^2 du.$

(2) Для довільних $b,c > 0$:

$$g(a,b) + g(a+b,c) = b\int_0^b EX_u^2 du + c\int_0^c EX_u^2 du \leq$$

$$\leq b\int_0^{b+c}EX_u^2 du + c\int_0^{b+c}EX_u^2 du =$$

$$= (b+c)\int_0^{b+c}EX_u^2 du = g(a,b+c).$$

Отже, функція $g(a,b)$ є супераддитивною моментною функцією другого порядку для процесу X_t. Таким чином, ми отримали таке твердження.

***Наслідок* 3.** Нехай $X_t,\ t \geq 0$, — квазістаціонарний процес. Тоді

$$EM_{a,b}^2 \leq Cb(\log_2 2b)^2\int_0^b EX_u^2 du,$$

де $C = \max\left\{1, \frac{\sup_{a>0}EM_{a,2}^2}{\inf_{a>0}g(a,1)}\right\}.$

Розглянемо частинний випадок, коли $EX_t^2 = At^{\alpha},\ \alpha > 0,\ A$ — деяка константа.

***Наслідок* 4.** Нехай $\rho(u) = Au^{\alpha},\ \alpha > 0,\ A$ — деяка константа, тоді

$$EM_{a,b}^2 \leq \frac{Ab^{\alpha+2}C\log_2^2 2b}{\alpha+1}, \tag{5}$$

де $C = \max\left\{1, \frac{\sup_{a>0}EM_{a,2}^2}{\inf_{a>0}g(a,1)}\right\}.$

Доведення. За таких умов функція $g(a,b)$ матиме вигляд

$$g(a,b) = b\int_0^b Au^{\alpha}du = \frac{Ab^{\alpha+2}}{\alpha+1},$$

звідки отримаємо (5).

Аналогічний результат для послідовності випадкових величин встановив Р. Серфлінг [1]. Припустимо, що існують невід'ємні константи $r_j,\ j = 0,1,\ldots$, такі, що $E(X_iX_{i+j}) \leq r_j$ для всіх $i,j \geq 0$.
Тоді

$$E(M_{a,b}^2) \leq b(\log_2 2b)^2\left(r_0 + 2\sum_{j=1}^{b-1}r_j\right).$$

Висновки

У роботі розглянуто оцінювання моментів екстремумів випадкового процесу із супераддитивною моментною функцією. Запропоновано метод оцінки моментів супремуму значень випадкових процесів із супераддитивною моментною функцією, який є аналогом метода Р. Серфлінга [1], застосованого до послідовностей випадкових величин. Також наведено два частинних випадки застосування отриманих результатів до випадкових процесів з ортогональними приростами та квазістаціонарних випадкових процесів.

Отримані результати можуть використовуватись у подальшому для доведення підсиленого закону великих чисел для випадкових процесів із супераддитивною моментною функцією.

Список літератури

1. *R.J. Serfling,* “Moment inequalities for the maximum cumulative sum”, Ann. Math. Statist., vol. 41, pp. 1227–1234, 1970.
2. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов / Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 359 с.
3. *F. Moricz,* “Moment Inequalities and the Strong Laws of Large Numbers”, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete, vol. 35, pp. 299–314, 1976.
4. *F.A. Myricz et al.,*“Moment and probability bounds with quasi-superadditive structure for the maximum partial sum”, The Annals of Probability, vol. 10, no. 4, pp. 1032–1040, 1982.
5. *F.A. Moricz,* “A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series”, Acta Math. Hung., vol. 41, no. 3-4, pp. 337–346, 1983.
6. *T. Tómács,* “A moment inequality for the maximum partial sums with a generalized superadditive structure”, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, vol. 26, pp. 75–79, 1999.
7. *F. Moricz et al.,* “Strong Laws for Blockwise M-dependent Random Fields”, J. Theor. Probability, vol. 31, no. 3, pp. 660–671, 2008.
8. *U. Stadtmuller and Le V. Thanh,* “On the strong limit theorems for double arrays of blockwise M-dependent random variables”, Acta Math. Sinica, vol. 27, no. 10, pp. 1923–1934, 2011.
9. *I. Fazekas and O. Klesov*, “A general approach to the strong laws of large numbers”, Theory Probab. Appl., vol. 45, pp. 436–449, 2000.
10. *Grozian T.M.* Strong law of large numbers for random variables with superadditive moment function // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2012. – № 4. – С. 39–42.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
21 лютого 2014 року