УДК 517.9

Дудкін М.Є., Козак В.І.

ПРЯМА ЗАДАЧА ДЛЯ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ТИПУ ЯКОБІ, ВІДПОВІДНИХ ДВОВИМІРНІЙ ДІЙСНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

The generalization of the classical moment problem and the spectral theory of self-adjoint Jacobi block matrix are well-known in one-dimensional case and it generalized on the two-dimensional case. Finite and infinite moment problem is solved using Yu.M. Berezansky generalized eigenfunction expansion method for respectively finite and infinite family of commuting self-adjoint operators. In the classical case one orthogonalize a family of polynomials $x^n, n\in\mathbb{N}_0$, with respect to a measure on the real axis and shift operator on x takes the form of ordinary Jacobi matrix. Jacobi matrix determines the difference equation. Solving the difference equation, we obtain the corresponding polynomial that called the direct problem. The construction of the matrix is called inverse problem. In this publication we orthogonalize two-indexes family of polynomials x^n, y^m, $n,m\in\mathbb{N}_0$, with respect to a measure on the real plane. For orthogonalization order should be chosen. In this case we have two shift operators on x and on y. According to the chosen order, these operators take the form of block Jacobi matrices of special form. The main result is the solution of the direct problem, which consists in the following: to solve the system of two difference equations generated by block Jacobi type matrices, i.e., to obtain the corresponding polynomials but in two variables. The correctness of the solution is guaranteed again by Yu.M. Berezanskyi generalized eigenfunction expansion method for a pair of commuting self-adjoint operators. Constructions are connected with an application in spring pendulum in the plane.

Keywords: block Jacobi matrixi, moment problem, generalized eigenfunction expansion, difference equations.

Вступ

Одновимірна дійсна проблема моментів з'явилася в 19 ст. у роботах Г. Гамбургера, Т. Стілтьєса і, отже, отримала їх ім'я. Коло задач, пов'язаних із такою проблемою, є достатньо широким. Сюди відноситься і теорія операторів, зокрема: теорія розширення симетричних операторів до самоспряжених; відновлення міри за заданими моментами; задача розв'язання різницевого рівняння, заданого матрицею Якобі, та інші. Найбільш вагомі результати в цьому колі задач належать М.Г. Крейну, Н.І. Ахієзеру, Ю.М. Березанському [1–6].

На сьогодні коло задач, пов'язаних із одновимірною дійсною проблемою моментів, набуло численних узагальнень на випадок тригонометричної, комплексної, багатовимірної та навіть нескінченновимірної дійсної проблеми моментів. У зв'язку із відповідними до названих проблем матрицями Якобі відзначимо праці [7–10].

Постановка задачі

Із проблемою моментів Гамбургера або з мірою на дійсній вісі, як зазначено у вступі, пов'язана матриця Якобі. В попередніх дослідженнях [11] подано розв'язок оберненої спектральної задачі для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів. Тобто побудовані названі матриці. Завданням цієї публікації є розв'язання системи двох (оскільки матриці дві) різницевих рівнянь із блочними коефіцієнтами (оскільки матриці блочні). Обґрунтування коректності розв'язку гарантується теорією Ю.М. Березанського про розклад за узагальненими власними векторами [4–6] у випадку пари комутуючих самоспряжених операторів.

Попередні відомості

Нехай $d\rho(x,y)$ – імовірнісна міра Бореля на компактній множині дійсної площини $\mathbb{R}^2$ і $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ простору функцій, інтегровних із квадратом на $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що на носії міри множина функцій $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^m y^n$, $m,n\in\mathbb{N}_0$ є лінійно залежною і тотальною в L_2.

В [11] знайдено матриці типу Якобі J_A і J_B ортогоналізацією в L_2 множини функцій

$$\{x^m y^n\},\ m,n\in\mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Там використано порядок ортогоналізації, як у [13] (див. також, наприклад, [12, розд. 7]):

$$x^0 y^0;$$

$$x^0y^1, x^0y^2, x^1y^1, x^2y^0; \ldots; \quad x^0y^n, x^1y^{n-1}, \ldots, x^ny^0; \ldots \tag{2}$$

Як результат отримано поліноми за степенями x^my^n, $m,n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{llll} P_{0;0}(x,y); & P_{1;0}(x,y), & P_{2;0}(x,y), \ldots; & P_{n;0}(x,y), \ldots \\ & P_{1;1}(x,y), & P_{2;1}(x,y), & P_{n;1}(x,y), \\ & & P_{2;2}(x,y), & P_{n;2}(x,y), \\ & & & \ldots \\ & & & P_{n;n}(x,y), \end{array} \tag{3}$$

де кожен поліном має вигляд $P_{n;\alpha}(x,y) = k_{n;\alpha}x^\alpha y^{n-\alpha} + \ldots, n \in \mathbb{N}_0, \alpha = 0,1,\ldots,n,$ $k_{n;\alpha} > 0$; тут + ... позначає наступну частину відповідного полінома; також покладено $P_{0;0}(x,y) = 1$.

Отже, обмежений самоспряжений оператор $\hat{A}$ множення на x у просторі L_2 в ортогональному базисі (3) поліномів має форму блочної тридіагональної типу Якобі симетричної матриці $J_A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, що діє в просторі

$$1_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots, \ \mathcal{H}_n = C^{n+1}, \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Норми всіх операторів $a_{j,k} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$ рівномірно обмежені відносно $j,k \in \mathbb{N}_0$.
Ця матриця має форму:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{5}$$

У (5) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ b_n є $((n+1)\times(n+1))$-матрицею: $b_n = (b_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($b_0 = b_{0;0,0}$ – скаляр); a_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $a_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$, c_n є $((n+1)\times(n+2))$-матрицею: $c_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$. У матрицях a_n і c_n деякі елементи завжди дорівнюють нулю: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} a_{n;\beta+2,\beta} = a_{n;\beta+3,\beta} = \ldots = a_{n;n+1,\beta} = 0, \\ \beta = 0,1,\ldots,n-1; \\ c_{n;\alpha,\alpha+2} = c_{n;\alpha,\alpha+3} = \ldots = c_{n;\alpha,n+1} = 0, \\ \alpha = 0,1,\ldots,n-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Деякі її елементи додатні, а саме $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$a_{n;\alpha+1,\alpha}; c_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \ \alpha = 0,1,\ldots,n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Оператор симетричний $(\hat{A})^* = \hat{A}$:

$$a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}, \ \beta = 0,1,2,\ldots,n, \ \alpha = 0,1,\ldots,\beta,\beta+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Матриця J_A діє таким чином:

$$(J_A f)_n = a_{n-1}f_{n-1} + b_nf_n + c_nf_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}_0, \quad f_{-1} = 0, \ \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2. \tag{8}$$

І, аналогічно, обмежений самоспряжений оператор $\hat{B}$ множення на y у просторі L_2 в ортогональному базисі (3) поліномів має форму блочної тридіагональної типу Якобі симетричної матриці $J_B = (b_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}$, що діє в просторі (4). Норми всіх операторів $b_{j,k} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j$ також рівномірно обмежені відносно $j,k \in \mathbb{N}_0$. Ця матриця має такий вигляд:

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & w_3 & v_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{9}$$

У (9) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ w_n є $((n+1)\times(n+1))$-матрицею: $w_n = (w_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n}$, ($w_0 = w_{0;0,0}$ є скаляром); u_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $u_n = (a_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n+1,n}$; v_n є $((n+2)\times(n+1))$-матрицею: $v_n = (c_{n;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{n,n+1}$. У матрицях u_n і v_n деякі елементи завжди дорівнюють нулю: $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{gathered} u_{n;\beta+1,\beta} = u_{n;\beta+2,\beta} = \ldots = u_{n;n+1,\beta} = 0, \\ \beta = 0,1,\ldots,n; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} u_{n;\alpha,\alpha+1} = u_{n;\alpha,\alpha+2} = \ldots = u_{n;\alpha,n+1} = 0, \\ \alpha = 0,1,\ldots,n. \end{gathered}$$

Деякі її елементи додатні, а саме:

$$u_{n;\alpha,\alpha}; v_{n;\alpha,\alpha+1} > 0, \ \alpha = 0,1,\ldots,n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{11}$$

Оператор $(\hat{B})^* = \hat{B}$ також симетричний:

$u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}$, $\alpha = 0,1,2,\ldots,n$, $\beta = \alpha,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$.

Матриця J_B діє таким чином:

$$(J_B f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$f_{-1} = 0, \quad \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2. \tag{12}$$

Пряма спектральна задача

Ми розглядаємо оператори у просторі l_2 вигляду (4). Додатково до простору l_2 ми розглядаємо його оснащення

$$(l_{\text{fin}})' \supset l_2(p^{-1}) \supset l_2 \supset l_2(p) \supset l_{\text{fin}}, \tag{13}$$

де $l_2(p)$ є зваженим l_2-простором з вагою $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$, $(p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty})$.

У нашому випадку $l_2(p)$ є гільбертовим простором послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$, для яких у нас є норма і скалярний добуток:

$$\begin{aligned} \|f\|_{l_2(p)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 p_n, \\ (f,g)_{l_2(p)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} p_n. \end{aligned} \tag{14}$$

Простір $l_2(p^{-1})$ аналогічно визначається; нагадаємо, що l_{fin} є простором фінітних послідовностей і $(l_{\text{fin}})'$ є простором, спряженим до l_{fin}. Легко показати, що вкладення $l_2(p) \to l_2$ є квазіядерним, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n^{-1} < \infty$ (див., наприклад, [5, розд. 7; 12, розд. 15]).

Нехай A і B — комутуючі обмежені самоспряжені оператори, стандартно пов'язані з оснащенням (13). Згідно з проективною спектральною теоремою (див. [6, розд. 3, теорема 2.7; 5, розд. 5; 12, розд. 15] такий оператор має вигляд

$$\begin{aligned} Af &= \int_{\Re^2} x \Phi(x,y) d\sigma(x,y) f, \\ Bf &= \int_{\Re^2} y \Phi(x,y) d\sigma(x,y) f, \; f \in l_2, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\Phi(x,y) : l_2(p) \to l_2(p^{-1})$ є оператором узагальненого проектування, а $d\sigma(x,y)$ — його спектральною мірою. Для кожного $f \in l_{\text{fin}}$ проекція $\Phi(x,y)f \in l_2(p^{-1})$ є узагальненим власним вектором операторів A і B з відповідними власними x і y. Для всіх $f, g \in l_{\text{fin}}$ маємо рівність Парсеваля:

$$(f,g)_{l_2} = \int_{\Re^2} (\Phi(x,y) f, g)_{l_2} d\sigma(x,y); \tag{16}$$

і після замикання за неперервністю рівності (16) справедлива для $\forall f, g \in l_2$. Позначимо через π_n оператор ортогонального проектування в l_2 з $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Отже, $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2$ ми маємо $f_n = \pi_n f$. Цей оператор діє аналогічно на просторах $l_2(p)$ і $l_2(p^{-1})$.

Розглянемо матрицю оператора

$$(\Phi_{j,k}(x,y))_{j,k=0}^{\infty},$$

де

$$\Phi_{j,k}(x,y) = \pi_j \Phi(x,y) \pi_k : l_2 \to \mathcal{H}_j, \; (\mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_j). \tag{17}$$

Рівність Парсеваля (16) можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} (f,g)_{l_2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y) \pi_k f, \pi_j g)_{l_2} d\sigma(x,y) = \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\pi_j \Phi(x,y) \pi_k f, g)_{l_2} d\sigma(x,y) = \\ &= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{l_2} d\sigma(x,y), \forall f, g \in l_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Тепер розглянемо більш спеціальні обмежені оператори A і B, що діють у просторі l_2. А саме, нехай їм відповідають матриці J_A і J_B, які мають тридіагональну блочну структуру вигляду (5), (9). Отже, оператори A і B задаються виразами (8) і (12). Нагадаємо, що норми всіх елементів a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, u_n рівномірно обмежені відносно $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень ми припускаємо, що умови (6), (7) і (10), (11) виконані і, крім того, оператори A і B, задані в (5) і (9), — обмежені комутуючі самоспряжені на l_2 (умови, що оператори A і B комутуючі, ми будемо досліджувати в наступній публікації).

На наступному кроці перепишемо рівність Парсеваля (18) у термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів A і B. Спочатку ми доведемо таку лему.

Лема 1. Нехай $\varphi(x,y)=(\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y)\in\mathcal{H}_n$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ буде узагальненим власним вектором з $(l_{\text{fin}})'$ оператора A із власним значенням x, а також узагальненим власним вектором з B із власним значенням y. Тоді $\varphi(x,y)$ є розв'язком на $(l_{\text{fin}})'$ двох різницевих рівнянь (див. (8), (12)):

$$\begin{aligned} J_A\varphi(x,y))_n &= a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y)+b_n\varphi_n(x,y)+\\ &+c\varphi_{n+1}(x,y)=x\varphi_n(x,y),\\ J_B\varphi(x,y))_n &= u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y)+w_n\varphi_n(x,y)+\\ &+v_n\varphi_{n+1}(x,y)=y\varphi_n(x,y),\\ &n\in\mathbb{N}_0,\ \ \varphi_{-1}(x,y)=0, \end{aligned} \tag{19}$$

з початковою умовою $\varphi_0(x,y)=\varphi_0\in\mathbb{R}$, незалежною від x, y.

Ми стверджуємо, що цей розв'язок є таким: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\varphi_n(x,y)=Q_n(x,y)\varphi_0=(Q_{n;0},Q_{n;1},\ldots,Q_{n;n})\varphi_0. \tag{20}$$

Тут $Q_{n;\alpha}$, $\alpha=0,1,\ldots,n$ є поліномами x та y і ці поліноми мають вигляд

$$Q_{n;\alpha}(x,y)=l_{n;\alpha}y^{n-\alpha}x^{\alpha}+q_{n;\alpha}(x,y),\ \ \alpha=1,\ldots,n, \tag{21}$$

де $l_{n;\alpha}>0$ і $q_{n;\alpha}(x,y)$ є деякою лінійною комбінацією $y^jx^k,\ 0\le j+k\le n-1$, $y^{n-(\alpha-1)}x^{\alpha-1}$. Останні вирази описані для $\alpha=1,\ldots,n$; і маємо $y^{n-1}x^{n-1}$, якщо $\alpha=0$.

У лемі не стверджується, що розв'язок перевизначеної системи (19) існує для довільних початкових даних $\varphi_0\in\mathbb{R}$. Доводиться лише, що узагальнений власний вектор з $(l_{\text{fin}})'$ операторів A і B є розв'язком (19) та має вигляд (20) і (21).

Далі зручно розглядати $Q_n(x,y)$ з фіксованими x та y як лінійний оператор, який діє з $\mathcal{H}_0$ у $\mathcal{H}_n$, тобто, $\mathcal{H}_0\ni\varphi_0\mapsto Q_n(x,y)\varphi_0\in\mathcal{H}_n$. Вираз $Q_n(x,y)$ розуміємо як операторнозначний поліном від $x,y\in\mathbb{R}^2$; отже, для спряженого оператора $Q_n^*(x,y)=(Q_n(x,y))^*:\mathcal{H}_n\to\mathcal{H}_0$. Використовуючи ці поліноми $Q_n(x,y)$, побудуємо таке зображення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Лема 2. Оператор $\Phi_{j,k}(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ має таке зображення:

$$\Phi_{j,k}(x,y)=Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y):\mathcal{H}_k\to\mathcal{H}_j,\quad j,k\in\mathbb{N}_0, \tag{22}$$

де $\Phi_{0,0}(x,y)\ge 0$ — число.

При фіксованому $k\in\mathbb{N}_0$ вектор $\varphi=\varphi(x,y)=(\varphi_j(x,y))_{j=0}^{\infty}$, де

$$\varphi_j(x,y)=\Phi_{j,k}(x,y)=\pi_j\Phi(x,y)\pi_k\in\mathcal{H}_j,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{23}$$

є узагальненим розв'язком в $(l_{\text{fin}})'$ рівнянь

$$J_{\text{A}}\varphi(x,y)=x\varphi(x,y),\ \ J_{\text{B}}\varphi(x,y)=y\varphi(x,y),$$

оскільки $\Phi(x,y)$ — проектор на узагальнені власні вектори операторів A і B з відповідними узагальненими власними числами (x,y). Таким чином, випливає, що $\varphi=\varphi(x,y)\in l_2(p^{-1})$ існує як звичайний розв'язок рівняння $J_A\varphi=x\varphi$, $J_B\varphi=y\varphi$ з початковими умовами $\varphi_0=\pi_0\Phi(x,y)\pi_k\in\mathcal{H}_0$.

З використанням леми 1 і завдяки (20) отримуємо

$$\Phi_{j,k}(x,y)=Q_j(x,y)(\Phi_{0,k}(x,y)),\ \ j\in\mathbb{N}_0. \tag{24}$$

Оператор $\Phi(x,y):l_2(p)\to l_2(p^{-1})$ є формально самоспряженим у l_2 як похідна від розкладу одиниці оператора A і B з l_2 відносно спектральної міри. Таким чином, відповідно до (22), ми отримуємо

$$\begin{aligned}(\Phi_{j,k}(x,y))^*&=(\pi_j\Phi(x,y)\pi_k)^*=\pi_k\Phi(x,y)\pi_j=\\ &=\Phi_{k,j}(x,y),\ j,k\in\mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{25}$$

При фіксованому $j\in\mathbb{N}_0$ з (25) і з попередніх міркувань випливає, що вектор

$$\varphi=\varphi(x,y)=(\varphi_k(x,y))_{k=0}^{\infty},$$

$$\varphi_k(x,y)=\Phi_{k,j}(x,y)=(\Phi_{j,k}(x,y))^*$$

є звичайним розв'язком рівнянь $J_A\varphi=x\varphi$ і $J_B\varphi=y\varphi$ з початковими умовами $\varphi_0=\Phi_{0,j}(x,y)=(\Phi_{j,0}(x,y))^*$.

Знову використовуючи лему 1, отримаємо зображення типу (24):

$$\Phi_{k,j}(x,y) = Q_k(x,y)(\Phi_{0,j}(x,y)), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (26)$$

Враховуючи (25) і (26), отримуємо

$$\Phi_{0,k}(x,y) = (\Phi_{k,0}(x,y))^* = (Q_k(x,y)\Phi_{0,0}(x,y))^* =$$

$$= \Phi_{0,0}(x,y)(Q_k(x,y))^*, \, k \in \mathbb{N}_0. \quad (27)$$

(тут використано нерівність $\Phi_{0,0}(x,y) \geq 0$, яка випливає з (16) і (17)). Підставляючи (27) у (24), отримуємо (22).

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (18) у більш конкретній формі. З цією метою підставимо вираз (22) із $\Phi_{j,k}(x,y)$ у (18) і отримаємо, що

$$(f,g)_{l_2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\Phi_{j,k}(x,y) f_k, g_j)_{l_2} d\sigma(x,y) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{R}^2} (Q_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)Q_k^*(x,y) f_k, g_j)_{l_2} d\sigma(x,y) =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y) f_k, Q_j^*(x,y) g_j)_{l_2} d\rho(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^*(x,y) f_k \right) \overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(x,y) g_j \right)} d\rho(x,y), \quad (28)$$

$$d\rho(x,y) = \Phi_{0,0}(x,y) d\sigma(x,y), \; \forall f, g \in l_{\text{fin}}.$$

Зобразимо перетворення Фур'є ^, використовуючи комутуючі самоспряжені оператори A і B у просторі l_2:

$$l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x,y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^*(x,y) f_n \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)). \quad (29)$$

Отже, (28) дає рівність Парсеваля у фінальному вигляді:

$$(f,g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y) \overline{\hat{g}(x,y)}) d\rho(x,y), \; \forall f, g \in l_{\text{fin}}. (30)$$

Рівність (30) продовжується за неперервністю $\forall f, g \in l_2$.

Ортогональність поліномів $Q_n^*(x,y)$ випливає з (29) і (30). А саме, достатньо тільки, щоб $f = (0,\ldots,0,f_k,0,\ldots)$, $f_k \in \mathcal{H}_k$, $g = (0,\ldots,0,g_j,$ $0,\ldots)$, $g_j \in \mathcal{H}_j$ у (29) і (30). Тоді

$$\int_{\mathbb{R}^2} (Q_k^*(x,y) f_k) \overline{(Q_j^*(x,y)\, g_j)} d\rho(x,y) =$$

$$= \delta_{j,k}(f_j, g_j)_{\mathcal{H}_j}, \forall k, \, j \in \mathbb{N}_0. \quad (31)$$

Використовуючи співвідношення (20) для цих многочленів, ми можемо переписати рівність (31) у звичайному класичному скалярному вигляді. Щоб зробити це, зауважимо, що в цілому $Q_0^*(x,y) = \bar{Q}_0(x,y)$ і для $n \in \mathbb{N}$ відповідно до (20) $Q_n(x,y) = Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \ldots,$ $Q_{n;n}(x,y)) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_n$. Таким чином, для спряженого оператора ми маємо

$$(Q_n(x,y)q, p)_{\mathcal{H}_n} = ((Q_{n;0}(x,y)q, Q_{n;1}(x,y)q, \ldots,$$

$$Q_{n;n}(x,y)q), (p_0, p_1, \ldots, p_n))\mathcal{H}_n =$$

$$= Q_{n;0}(x,y) q\bar{p}_0 + Q_{n;1}(x,y) q\bar{p}_1 + \ldots + Q_{n;n}(x,y) q\bar{p}_n =$$

$$= \overline{q(\overline{Q_{n;0}(x,y)} p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)} p_1 + \ldots + \overline{Q_{n;n}(x,y)} p_n)} =$$

$$= (q, Q_n^*(x,y) p)_{\mathcal{H}_0},$$

тобто $Q_n^*(x,y) p = \overline{Q_{n;0}(x,y)} p_0 + \overline{Q_{n;1}(x,y)} p_1 + \ldots +$ $+ \overline{Q_{n;n}(x,y)} p_n, \forall q \in \mathcal{H}_0$, і $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{H}_n$.

Завдяки останній рівності для $n \in \mathbb{N}$ і $f_n = (f_{n;0}, f_{n,1}, \ldots, f_{n;n}) \in \mathcal{H}_n$ отримуємо

$$Q_n^*(x,y) f_n =$$

$$= \overline{Q_{n;0}(x,y)} f_{n;0} + \overline{Q_{n;1}(x,y)} f_{n;1} + \ldots + \overline{Q_{n;n}(x,y)} f_{n;n},$$

$$Q_0^*(x,y) = 1. \quad (32)$$

Тому (31) має вигляд

$$\forall f_{k;0}, f_{k;1}, \ldots, f_{k;k}, \;\; g_{j;0}, g_{j;1}, \ldots, g_{j;j} \in C, \; j,k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=0}^{k} \overline{Q_{k,\alpha}(x,y)} f_{k,\alpha} \right) \overline{\left(\sum_{\beta=0}^{j} \overline{Q_{j,\beta}(x,y)} f_{j,\beta}) \right)} d\rho(x,y) =$$

$$= \delta_{j,k} \sum_{\alpha=0}^{j} f_{j,\alpha} \, \bar{g}_{j,\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна такому співвідношенню ортогональності у звичайному класичному вигляді:

$$\int_{\Re^2} \overline{Q^*_{k,\beta}(x,y)} Q_{j,\beta} d\rho(x,y) = \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta}$$

$$(Q_{0;0} = Q_0(x,y)), \tag{33}$$

$\forall j, k \in \mathbb{N}_0, \forall \alpha = 0,1,\ldots,j,\ \beta = 0,1,\ldots,k$.

Зауважимо, що у зв'язку з (32) перетворення Фур'є (29) можна переписати у вигляді

$$\hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{Q_{n,\alpha}(x,y)} f_{n;\alpha},\ \forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in l_2,$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{34}$$

Використовуючи вказані вище результати, ми можемо сформулювати таку спектральну теорему для наших обмежених комутуючих симетричних операторів *A* і *B*.

Теорема. Розглянемо простір (4) та лінійні оператори *A* і *B*, які визначаються на фінітних векторах l_{fin} блочними тридіагональними типу Якобі матрицями J_A і J_B вигляду (5) і (9) та дією (8) і (12). Вважаємо, що всі коефіцієнти a_n, b_n, c_n та u_n, v_n, w_n, $n \in \mathbb{N}_0$, рівномірно обмежені, деякі елементи цих матриць дорівнюють нулю або додатні відповідно до (6), (7) і (10), (11) та замикання *A* і *B* за неперервністю є обмеженими комутуючими самоспряженими операторами на цьому просторі. Розклад за узагальненими власними функціями операторів *A* і *B* має такий вигляд. Згідно з (1) ми зображаємо, використовуючи $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, розв'язок $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y) \in \mathcal{H}_n$, рівняння (19) (який існує завдяки проективній спектральній теоремі) для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_n(x,y) = Q_n(x,y)\varphi_0 =$$
$$= (Q_{n;0}(x,y), Q_{n;1}(x,y), \ldots, Q_{n;n}(x,y))\varphi_0,$$

де $Q_{n;\alpha}(x,y), \alpha = 0,1,\ldots,n$, – многочлени від x та y. Тоді перетворення Фур'є має вигляд

$$l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^*_n(x,y) f_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{Q_{n;\alpha}(x,y)} f_{n;\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)), \tag{35}$$

де $Q^*_n(x,y) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0$ є пов'язаним з оператором $Q_n(x,y) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_n, d\rho(x,y)$ – це ймовірнісна спектральна міра A і B.

Рівність Парсеваля має такий вигляд: $\forall f, g \in l_{\text{fin}}$

$$(f,g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),$$

$$(J_A f, g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} x\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y), \tag{36}$$

$$(J_B f, g)_{l_2} = \int_{\mathbb{R}^2} y\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y).$$

Тотожності (35) і (36) продовжуються за неперервністю $\forall f, g \in l_2$ і роблять оператор (35) унітарним з простору l_2 на весь $L_2(\mathbb{R}^2, dp(x,y))$. Поліноми $\overline{Q_{n;\alpha}(x,y)}, n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0,1,\ldots,n$, і $Q_{0;0}(x,y) = 1$ утворюють ортонормовану систему в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ у сенсі (33) і є тотальними в цьому просторі.

Остання теорема розв'язує пряму задачу для обмежених симетричних комутуючих операторів *A* і *B*, що генеруються в просторі l_2 матриць J_A і J_B у вигляді (5) та (9).

Обернена задача полягала в побудові за заданою мірою $d\rho(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм обмежених симетричних комутуючих матриць J_A і J_B у вигляді (5) і (9), які мають свою спектральну міру, рівну $d\rho(x,y)$. Ця побудова ведеться відповідно до зазначеного у попередніх відомостях з використанням процедури ортогоналізації Шмідта для системи (2). Для матриць J_A і J_B у формі (5) та (9), які побудовані за $d\rho(x,y)$, спектральна міра відповідних обмежених симетричних операторів комутуючих *A* і *B* є такою, що збігається з початковою мірою.

Висновки

У роботі використано дві блочні матриці типу Якобі, відповідні двовимірній проблемі моментів. Вони є аналогом звичайної матриці Якобі, відповідної проблемі моментів Гамбургера. Для блочних матриць сформульована і розв'язана пряма спектральна задача. Розв'язками задачі є пари взаємно ортогональних поліномів, за якими відновлюється міра. Математична строгість і коректність побудов гарантується розкладом за узагальненими власними векторами Березанського (у цьому випадку для пари комутуючих самоспряжених операторів).

Перспективними є дослідження внутрішньої структури зазначених матриць: за яких загальних умов на коефіцієнти матриць ці матриці є не тільки симетричними операторами, але й переставними на фінітних послідовностях. Не розв'язаною є задача опису, тобто що потрібно вибрати за інваріанти в таких матрицях.

Список літератури

1. *M.G. Krein,* "On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products", Dokl. Acad. Nauk SSSR, vol. 53, no. 1, pp. 3–6, 1946.
2. *M.G. Krein,* "On Hermitian operators with directing functionals", Zbirnyk prac' Inst. Mat. AN USSR, no. 10, pp. 83–106, 1948.
3. *N.I. Akhiezer,* The Classical Moment Problem and Some Belated Questions in Analysis. New York: Hafner, 1965 (Rus. ed.: Moscow: Fizmatgiz, 1961).
4. *Yu.M. Berezansky,* "The expansions in eigenfunctions of partial difference equations of order two", Trudy Moskov. Mat. Obshch., vol. 5, pp. 203–268, 1956.
5. *Yu.M. Berezansky,* "Expansions in Eigenfunctions of Self adjoint Operators", Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968 (Rus. ed.: Kiev: Naukova Dumka, 1965).
6. *Yu.M. Berezansky and Yu.G. Kondratiev,* Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis, Vols. 1. 2. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1995 (Rus. ed.: Kiev: Naukova Dumka, 1988).
7. *Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin,* "The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices", Methods Funct. Anal. Topology, vol. 11, no. 4, pp. 327–345, 2005.
8. *Yu.M. Berezansky and M.E. Dudkin,* "The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices", Ibid, vol. 12, no. 1, pp. 1–32, 2005.
9. *A. Devinatz,* "Integral representations of positive definite functions, II", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 77, pp. 455–480, 1954.
10. *A. Devinatz,* "Two parameter moment problems", Duke Math. J., vol. 24, pp. 481– 498, 1957.
11. *Козак В.І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 73–76.
12. *Yu.M. Berezansky et al.,* Functional Analysis, Vols. 1. 2. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1996 (Rus. ed.: Kiev: Vyshcha shkola, 1990).
13. *P.K. Suetin,* Orthogonal polynomials in Two Variables. Moskow: Nauka, 1988.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
12 лютого 2014 року