УДК 517.18

В.В. Павленков

КОМПЛЕКСНОЗНАЧНІ ФУНКЦІЇ З НЕВИРОДЖЕНИМИ ГРУПАМИ РЕГУЛЯРНИХ ТОЧОК

Complex-valued functions with nondegenerate groups of regular points are studied in the paper. A class of functions f, which takes value on the complex plain and for which the limit $k_f(\lambda)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(\lambda x)}{f(x)}$ exists, and is nonzero and finite for some λ from subset of positive real numbers is considered. It was received that this subset is multiplicative group, and it is called the group of regular points. Functions with nondegenerate groups of regular points generalize the class of RV functions. The corresponding limit functions are defined for complex-valued functions with nondegenerate groups of regular points. Factorization representations for this limit functions are obtained. It was shown, that for complex-valued function with nondegenerate group of regular points it limit function can be represented as a product of power function and periodic function of logarithm argument. Similar results are known for real valued functions with nondegenerate groups of regular points. Obtained results are generalized and complemented corresponding results from real valued situation. Some well-known theorems from RV functions theory can be covered from this general approach.

Keywords: RV function, ORV function, group of regular points.

Вступ

Поняття *правильно змінної* (RV) функції було введено Дж. Караматою в 1930 р. [1]. Одержані ним результати були застосовані у багатьох розділах математики [2–4].

У наш час відомо багато узагальнень теорії правильно змінних функцій. Властивість правильної зміни розглядається як для комплекснозначних функцій (див. [2, 5, 6]), так і для більш широкого класу функцій [2].

В. Авакумович [7] означив поняття О-правильно змінної (ORV) функції. ORV-функції розширюють клас правильно змінних функцій.

У статті [8] вивчаються ORV-функції з "невиродженою групою регулярних точок". Властивості таких функцій допомагають довести низку результатів із теорії узагальнених процесів відновлення (див. [7]). У роботах [9, 10] досліджується асимптотична поведінка інтегралів від функцій з невиродженими групами регулярних точок.

Поняття "групи регулярних точок" можна означувати не лише для дійснозначних функцій. Саме вивченню комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок присвячена ця стаття.

Постановка задачі

Метою роботи є узагальнення результатів праці [8] на випадок комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок. Зауважимо, що для комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок неможливо означити граничні функції так, як це зроблено у дійснозначному випадку. Тому потрібно вдалим чином підібрати аналоги граничних функцій у комплекснозначному випадку.

Основні означення

Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{R}_+$ – множина додатних дійсних чисел, $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел, $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел, $\mathrm{F}(\mathbb{C})$ – множина комплекснозначних функцій $f:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{C}$ і

$$\mathrm{F}_+(\mathbb{C})=\bigcup_{A>0}\{f\in\mathrm{F}(\mathbb{C}):\ |f(x)|>0,\ x\in[A,+\infty)\}.$$

Число $\lambda>0$ називається *регулярною точкою функції* $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ і позначається $\lambda\in G_r(f)$, якщо існує скінченна границя

$$k_f(\lambda)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}\neq 0. \qquad (1)$$

Функцію $k_f=(k_f(\lambda),\ \lambda\in G_r(f))$ називають *граничною функцією для* f.

Множина $G_r(f)$ регулярних точок функції f є мультиплікативною підгрупою $\mathbb{R}_+$, тобто якщо $\lambda,\mu\in G_r(f)$, то $\lambda\cdot\mu\in G_r(f)$. Більше того, $1\in G_r(f)$. Якщо $G_r(f)=\{1\}$, то $G_r(f)$ називають *виродженою*, в інших випадках – *невиродженою*.

Нехай $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$. Якщо функція f – вимірна за Лебегом і $G_r(f) = \mathbb{R}_+$, то f називають *правильно змінною* (RV) функцією. Якщо при цьому $k_f(\lambda) = 1,\ \lambda > 0$, то f називають *повільно змінною* (SV) функцією.

Якщо функція $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ є RV-функцією, то її гранична функція завжди має вигляд

$$k_f(\lambda) = \lambda^{\alpha},\ \lambda > 0, \tag{2}$$

де α – деяке комплексне число (див. [2]).

Показник степеня α в (2) називається *порядком* або *індексом* RV-функції f. Показник $\alpha = 0$ мають SV-функції і тільки вони. Будь-яка RV-функція $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ з індексом α може бути подана у вигляді

$$f(x) = x^{\alpha} \cdot \ell(x),$$

де ℓ – SV-функція, відповідна f.

Означені комплекснозначні функції з невиродженими групами регулярних точок розширюють клас дійснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок. Дійснозначні функції з невиродженою групою регулярних точок розглядались у працях [4, 8]. Нагадаємо основні означення та результати цих праць.

Нехай $\mathrm{F}(\mathbb{R})$ – множина дійснозначних функцій $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ і

$$\mathrm{F}_+(\mathbb{R}) = \bigcup_{A>0} \{ f \in \mathrm{F}(\mathbb{R}) :\ f(x) > 0,\ x \in [A, +\infty) \},$$

нехай також

$$\begin{aligned} f^*(\lambda) &= \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)},\ \lambda > 0; \\ f_*(\lambda) &= \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)},\ \lambda > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Функції f^* і f_* називають *верхньою та нижньою граничними функціями*.

Число $\lambda > 0$ називається *регулярною точкою* функції $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ та позначається $\lambda \in G_r(f)$, якщо $0 < f^*(\lambda) = f_*(\lambda) < \infty$. Множина $G_r(f)$ регулярних точок функції $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ є мультиплікативною підгрупою $\mathbb{R}_+$. Якщо $G_r(f) = \{1\}$, то $G_r(f)$ називають *виродженою*, в інших випадках – *невиродженою*.

Якщо $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ і f є функцією з невиродженою групою регулярних точок, то при деяких додаткових умовах (див. [8]) її граничні функції можна записати у вигляді

$$f^*(\lambda) = \lambda^{\alpha} P(\log\lambda),\ \lambda > 0;\ f_*(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha}}{P(-\log\lambda)},$$

$$\lambda > 0;\ k_f(\lambda) = \lambda^{\alpha},\ \lambda \in G_r(f),$$

де α – деяке дійсне число, $(P(u),\ u \in \mathbb{R})$ – додатна періодична функція, $P(0) = 1$, причому $S_{\mathrm{per}}(P) = \mathrm{H}_{\mathrm{r}}(f)$. Тут $S_{\mathrm{per}}(P)$ – множина періодів функції P, $\mathrm{H}_{\mathrm{r}}(f) = \log(G_r(f))$ – адитивна підгрупа чисел u із $\mathbb{R}$, таких, що $\exp(u) \in G_r(f)$. Відомі також зображення і для самої функції f, а саме

$$f(x) = x^{\alpha} s(x),\ x > 0,$$

причому

$$s^*(\lambda) = P(\log\lambda),\ \lambda > 0.$$

У роботі розглянуті узагальнення зображень для граничних функцій у комплекснозначному випадку.

Приклади функцій з невиродженою групою регулярних точок

Нехай $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$. Функцію f можна записати у вигляді

$$f(x) = \rho(x) \cdot \exp(i\varphi(x)),\ x > 0, \tag{4}$$

де $\rho,\ \exp\varphi \in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$.

Твердження. Нехай $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$. Комплекснозначна функція f є функцією з невиродженою групою регулярних точок $G_r(f)$ тоді і тільки тоді, коли відповідні їй дійснозначні функції ρ і $\exp\varphi$ з (4) також є функціями з невиродженими групами регулярних точок $G_r(\rho)$ і $G_r(\exp\varphi)$ відповідно, такими, що група $G_r(\rho) \cap G_r(\exp\varphi)$ – невироджена. При цьому

$$G_r(f) = G_r(\rho) \cap G_r(\exp\varphi). \tag{5}$$

Доведення. Для функції f справедливе зображення (4). Зауважимо, що $\rho = |f|,\ \varphi = \arg(f)$. Тому для фіксованого $\lambda > 0$ скінченна та відмінна від нуля границя (1) існує тоді і тільки тоді, коли існують ненульові та скінченні границі

$$k_\rho(\lambda)=\lim_{x\to\infty}\frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)},$$

$$k_{\exp\varphi}(\lambda)=\lim_{x\to\infty}\exp(\varphi(\lambda x)-\varphi(x)).$$

Отже, групу регулярних точок функції f можна записати у вигляді (5), а саме

$$G_r(f)=\{\lambda>0:\rho^*(\lambda)=\rho_*(\lambda),\varphi^\Delta(\lambda)=\varphi_\Delta(\lambda)\}=$$
$$=G_r(\rho)\cap G_r(\exp\varphi),$$

де

$$\varphi^\Delta(\lambda)=\limsup_{x\to\infty}(\varphi(\lambda x)-\varphi(x));$$

$$\varphi_\Delta(\lambda)=\liminf_{x\to\infty}(\varphi(\lambda x)-\varphi(x)),\ \lambda>0, \qquad (6)$$

звідки слідує твердження. Твердження доведено.

Розглянемо приклади комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок.

***Приклад* 1.** Нехай $(r(x),\ x>0)$ – комплекснозначна RV-функція з індексом $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$. Покладемо

$$f(x)=r(x)\exp\{\sin(\log x)\},\ x>0.$$

Тоді, для всіх $\lambda>0$,

$$\rho^*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1}\exp\{2|\sin(\log\sqrt{\lambda})|\},$$

$$\rho_*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1}\exp\{-2|\sin(\log\sqrt{\lambda})|\},$$

$$\varphi^\Delta(\lambda)=\varphi_\Delta(\lambda)=\alpha_2\log\lambda.$$

Тому

$$G_r(f)=\{e^{2\pi n}:n\in\mathbb{Z}\}.$$

Отже f – функція з невиродженою групою регулярних точок. Більше того,

$$k_f(\lambda)=\lambda^\alpha,\ \lambda\in G_r(f).$$

***Приклад* 2.** Нехай $(r(x),\ x>0)$ – комплекснозначна RV-функція з індексом $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ і $d(x)$, $x>0$ – функція Діріхле, тобто

$$d(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Покладемо

$$f(x)=r(x)\exp\{id(x)\},\ x>0.$$

Тоді, для всіх $\lambda>0$,

$$\rho^*(\lambda)=\rho_*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1},\ \varphi^\Delta(\lambda)=\alpha_2\log\lambda+1-d(\lambda),$$

$$\varphi_\Delta(\lambda)=\alpha_2\log\lambda+d(\lambda)-1.$$

Тому

$$G_r(f)=\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+.$$

Отже f – функція з невиродженою групою регулярних точок. Більше того,

$$k_f(\lambda)=\lambda^\alpha,\ \lambda\in G_r(f).$$

***Приклад* 3.** Нехай $(r(x),\ x>0)$ – комплекснозначна RV-функція з індексом $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, G_1 і G_2 – мультиплікативні підгрупи $\mathbb{R}_+$, такі, що група $G=G_1\cap G_2$ є невиродженою.

Покладемо

$$f(x)=r(x)\exp\{I_{G_1}(x)+iI_{G_2}(x)\},\ x>0,$$

де I_M – функція-індикатор множини *M*. Тоді, для всіх $\lambda>0$,

$$\rho^*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1}\exp\{1-I_{G_1}(\lambda)\},$$

$$\rho_*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1}\exp\{I_{G_1}(\lambda)-1\},$$

$$\varphi^\Delta(\lambda)=\alpha_2\log\lambda+1-I_{G_2}(\lambda),$$

$$\varphi_\Delta(\lambda)=\alpha_2\log\lambda+I_{G_2}(\lambda)-1.$$

Тому

$$G_r(f)=G_r(\rho)\cap G_r(\exp\varphi)=G_1\cap G_2=G.$$

Отже f – функція з невиродженою групою регулярних точок. Більше того,

$$k_f(\lambda)=\lambda^\alpha,\ \lambda\in G_r(f).$$

Граничні функції

Нехай задано комплекснозначну функцію $f\in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ та відповідні їй дійснозначні функції ρ, $\exp\varphi\in \mathrm{F}_+(\mathbb{R})$. Покладемо

$$f_1(\lambda)=\rho^*(\lambda)\exp(i\varphi^\Delta(\lambda)),\ f_2(\lambda)=\rho_*(\lambda)\exp(i\varphi_\Delta(\lambda)),$$

$$f_3(\lambda)=\rho_*(\lambda)\exp(i\varphi^\Delta(\lambda)),\ f_4(\lambda)=\rho^*(\lambda)\exp(i\varphi_\Delta(\lambda)),$$

$$\lambda>0, \qquad (7)$$

і

$$F_1(\lambda,\mu)=\rho^*(\lambda)\exp(i\varphi^\Delta(\mu)),$$

$$F_2(\lambda,\mu)=\rho_*(\lambda)\exp(i\varphi_\Delta(\mu)),$$

$$F_3(\lambda,\mu)=\rho_*(\lambda)\exp(i\varphi^\Delta(\mu)), \qquad (8)$$

$$F_4(\lambda,\mu)=\rho^*(\lambda)\exp(i\varphi_\Delta(\mu)),\ \lambda,\mu>0.$$

Зауважимо, що формули (7) і (8) визначають комплекснозначні функції. Для їх означення використані граничні функції (3) і (6) з дійснозначного випадку.

Функції, визначені співвідношеннями (7) і (8), надалі будемо називати граничними функціями. Зауважимо, що $\lambda\in G_r(f)$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=f_3(\lambda)=f_4(\lambda).$$

Саме в цьому сенсі означені вище граничні функції для комплекснозначного випадку узагальнюють граничні функції f^* і f_* з дійснозначного випадку.

Розглянемо одну властивість граничних функцій.

Лема 1. Нехай $f\in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$. Тоді

(i) для будь-якого $\lambda>0$

$$f_i(\lambda)=F_i(\lambda,\lambda),\ i=1,\ldots,4;$$

(ii) для будь яких $\lambda,\mu>0$

$$F_2(\lambda,\mu)=\frac{1}{F_1(1/\lambda,1/\mu)}=\overline{F_3(\lambda,1/\mu)}=1/\overline{F_4(1/\lambda,\mu)},$$

де $\bar z$ – число, комплексноспряжене до z.

Нагадаємо (див. [8]), що функція $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{R})$ називається О-слабко правильно змінною (OWRV), якщо

$$0<f_*(\lambda)\le f^*(\lambda)<\infty \text{ для всіх } \lambda>0.$$

Зауважимо, що в цьому означенні не вимагається вимірність функції f.

***Означення* 1.** Нехай $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{R})$. Функція f називається OWRV-функцією, якщо відповідні їй функції ρ та $\exp\varphi$ – OWRV-функції .

***Означення* 2.** Нехай $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{R})$. Вимірна OWRV-функція f називається ORV-функцією.

Факторизаційні зображення граничних функцій для OWRV-функцій з невиродженими групами регулярних точок

У цьому розділі розглядається теорема про зображення граничних функцій, означених співвідношеннями (7) і (8).

Теорема 1. Нехай $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{C}$ – OWRV-функція з невиродженою групою регулярних точок $G_r(f)$ і нехай $c\in G_r(f)$ і $c\ne 1$. Тоді

$$F_1(\lambda,\mu)=\lambda^{\alpha_1}\mu^{i\alpha_2}P_1(\log\lambda)\exp\{ip_2(\log\mu)\},$$

$$\lambda,\mu>0, \qquad (9)$$

$$F_2(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^{\alpha_1}\mu^{i\alpha_2}}{P_1(-\log\lambda)\exp\{ip_2(-\log\mu)\}},\ \lambda,\mu>0, \quad (10)$$

$$F_3(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^{\alpha_1}\mu^{i\alpha_2}\exp\{ip_2(\log\mu)\}}{P_1(-\log\lambda)},\ \lambda,\mu>0, \quad (11)$$

$$F_4(\lambda,\mu)=\frac{\lambda^{\alpha_1}\mu^{i\alpha_2}P_1(\log\lambda)}{\exp\{ip_2(-\log\mu)\}},\ \lambda,\mu>0, \quad (12)$$

де

$$\alpha_1=\log_c k_\rho(c),\ \alpha_2=\log_c k_{\exp\varphi}(c),$$

функції $(P_1(u), u\in\mathbb{R})$ і $(\exp p_2(u), u\in\mathbb{R})$ додатні періодичні дійснозначні функції, $P_1(0)=1$, $p_2(0)=0$, для яких множини їх періодів $S_{\mathrm{per}}(P_1)$ та $S_{\mathrm{per}}(p_2)$ містять множину $\{nu_0 : n\in\mathbb{Z}\}$,

$$u_0=\log c\ne 0,$$

і $S_{\mathrm{per}}(P_1)\subset \mathrm{H}_r(r)$, $S_{\mathrm{per}}(p_2)\subset\mathrm{H}_r(\exp\varphi)$.

Доведення. Оскільки f – OWRV-функція з невиродженою групою регулярних точок, то ρ і $\exp\varphi$ є OWRV-функціями з невиродженими групами регулярних точок. Тому для функцій ρ і $\exp\varphi$ справедлива теорема 4.1 [8], з якої слідує:

$$\rho^*(\lambda)=\lambda^{\alpha_1}P_1(\log\lambda),\ \lambda>0, \qquad (13)$$

$$(\exp\varphi)^*(\lambda)=(\exp(\varphi^\Delta))(\lambda)=\lambda^{\alpha_2}\exp p_2(\log\lambda),$$

$$\lambda>0, \qquad (14)$$

причому функції $(P_1(u), u\in\mathbb{R})$ і $(\exp p_2(u), u\in\mathbb{R})$ задовольняють твердження теореми. Співвідношення (9)–(12) випливають зі співвідношень (13), (14), означень (7), (8) і леми 1. Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** Нехай $f\in\mathrm{F}_+(\mathbb{C})$, функції $(P_1(u), u\in\mathbb{R})$ і $(\exp p_2(u), u\in\mathbb{R})$ додатні скінченні та періодичні дійснозначні функції, $P_1(0)=1$, $p_2(0)=0$, причому $S_{\mathrm{per}}(P_1)\ne\{0\}$,

$S_{\mathrm{per}}(p_2) \neq \{0\}$ і $S_{\mathrm{per}}(P_1) \cap S_{\mathrm{per}}(p_2) \neq \varnothing$. Очевидно, що якщо співвідношення (9) виконується для деяких дійсних фіксованих α_1 і α_2, то f — OWRV-функція з невиродженою групою регулярних точок $G_r(f)$, причому $S_{\mathrm{per}}(P_1) \subset \mathrm{H}_{\mathrm{r}}(f)$ і $S_{\mathrm{per}}(p_2) \subset \mathrm{H}_{\mathrm{r}}(f)$. Більше того,

$$k_f(\lambda) = \lambda^{\alpha}, \ \lambda \in \exp(S_{\mathrm{per}}(P_1) \cap S_{\mathrm{per}}(p_2)).$$

***Наслідок* 2.** Нехай $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ — OWRV-функція з невиродженою групою регулярних точок $G_r(f)$. Тоді з теореми 4.1. слідує, що

$$\{u : P_1(u)P_1(-u) = 1, \ p_2(u) + p_2(-u) = 0\} = \mathrm{H}_{\mathrm{r}}(f).$$

Тому $G_r(f) = \mathbb{R}_+$ і $k_f(\lambda) = \lambda^{\alpha}$, $\lambda > 0$, тоді і тільки тоді, коли $P_1(u)P_1(-u) = 1$ і $p_2(u) + p_2(-u) = 0$ для всіх $u \in \mathbb{R}$.

Будь-яка ORV-функція є OWRV-функцією. Тому має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай $f \in \mathrm{F}_+(\mathbb{C})$ — ORV-функція з невиродженою групою регулярних точок $G_r(f)$. Тоді виконуються усі твердження теореми 1.

Висновки

У роботі розглянуто клас комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок. Оскільки в множині комплексних чисел не введено поняття порядку, то неможливо означувати верхню та нижню граничні функції формулою (3), як це зроблено в дійснозначному випадку. Формулами (7) і (8) означені граничні функції для комплекснозначного випадку. Для них отримані зображення, які задаються в теоремах 1 і 2. Відповідні зображення узагальнюють свої аналоги з дійснозначного випадку.

Зауважимо, що результати роботи тісно пов’язані з функціональним рівнянням типу Гамеля для комплекснозначної функції φ:

$$\varphi(cx) = \varphi(c)\varphi(x), \quad x > 0,$$

де $\varphi(1) = 1$ та змінна c набуває значення в мультиплікативній підгрупі $G \subset \mathbb{R}_+$.

Зауважимо, що в роботі отримані теореми про зображення граничних функцій. Тому в подальших дослідженнях планується отримання нових теорем про зображення самих комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок.

Список літератури

1. *J. Karamata*, “Sur un mode de croissance reguliere”, Mathematica (Cluj), vol. 4, pp. 38–53, 1930.
2. *N.M. Bingham et al.,* Regular variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987, 494 p.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
4. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 441 с.
5. *P.D.T.A. Elliott*, Probabilistic Number Theory I. New York: Springer, 1979, 393 p.
6. *Заболоцький М.* Комплекснозначні повільно змінні функції вздовж кривої та у вершині сектору // Мат. вісник наук. тов-ва ім. Шевченка. – 2005. – № 2. – С. 83–91.
7. *V.G. Avakumovic*, “Uber einer O-Inversionssatz”, Bull. Int. Acad. Youg. Sci., vol. 29-30, pp. 107–117, 1936.
8. *V.V. Buldygin et al.,* “On factorization representation for Avakumović-Karamata functions with nondegenerate groups of regular points”, Analysis Mathematica, vol. 30, pp. 161–192, 2004.
9. *Булдигін В.В., Павленков В.В.* Узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – № 81. – С. 13–24.
10. *Булдигін В.В., Павленков В.В.* Теорема Карамати для регулярно LOG-периодических функций // Укр. мат. журнал. – 2012. – **64**. – С. 1443–1463.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
2 квітня 2014 року