ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.21

І.П. Блажієвська

АСИМПТОТИЧНА НЕЗСУНЕНІСТЬ І КОНЗИСТЕНТНІСТЬ КОРЕЛОГРАМНИХ ОЦІНОК ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ СИСТЕМ

The estimation problem of an unknown real-valued response function of a linear continuous system is considered. We suppose that a family of zero-mean stationary Gaussian processes, which are close, in some sense, to a white noise, disturbs the system. Integral-type sample input-output cross-correlograms are taken as estimators of the response function from $L_2(\mathbb{R})$. The corresponding cross-correlogram estimator depends on two parameters (a parameter of a scheme of series and a length of an averaging interval) and is biased. Our aim is to investigate the properties of asymptotic unbiasedness and consistency of the estimator. The main results are obtained due to additional assumptions about the uniform Lipschitz condition for the response function, and balance conditions between the correlation functions of inputs and the parameter of the scheme of series. Properties of the Fourier transform, some properties of Fejers kernels and the Young inequality for convolutions are used to prove these facts. Both asymptotic unbiasedness and consistency in mean square sense are studied in the paper.

Keywords: response function, sample cross-correlogram, unbiasedness, consistency, the Young inequality for convolutions.

Вступ

Дослідження характеристик лінійних і нелінійних систем часто зустрічаються в задачах гідролокації, аеродинаміки, сейсмографії та радіофізики. Зокрема, вже шість десятиліть предметом вивчення є задача оцінювання імпульсної перехідної функції $H = (H(\tau), \tau \in R)$ лінійної однорідної системи по спостереженнях за реакцією системи на відомі збурення. Для розв'язання цієї задачі, поряд із детермінованими, широко застосовуються й статистичні підходи, наприклад корелограмний метод. Згідно з цим методом як оцінка для невідомої функції береться нормована сумісна корелограма, інтегрального або дискретного типу, між процесом, що збурює систему, та процесом відгуку системи [1–7].

При збуренні лінійної однорідної системи стаціонарним гауссівським білим шумом корелограмна оцінка пропорційна невідомій перехідній функції [8]. Це мотивує до розгляду моделі, коли на вхід системи подається послідовність стаціонарних гауссівських центрованих процесів, які, в деякому сенсі, наближаються до білого шуму (див. [2], [4–7], [9]). Зазначимо, що в цих статтях у постановці задачі фігурує припущення $H \in L_2(R)$. Така умова дає змогу розглядати нестійкі системи з резонансними особливостями.

При вивченні властивостей оцінок зазвичай цікавляться трьома основними питаннями: консистентністю, асимптотичною нормальністю та довірчими функціональними інтервалами. Дослідженню консистентності й асимп-тотичної нормальності корелограмної оцінки дискретного типу перехідної функції для даної моделі присвячені статті [4, 5]. З іншої сторони, для корелограмної оцінки інтегрального типу було доведено асимптотичну нормальність, а питання консистентності до цього часу не було розглянуто ([2] і [6, 7]). Наша робота заповнює цю прогалину, вивчаючи умови асимптотичної незсуненості та консистентності оцінки для перехідної функції.

Постановка задачі

У роботі розглядається корелограмний метод оцінювання перехідної функції $H \in L_2(R)$ лінійної однорідної системи, яка збурюється сім'єю стаціонарних гауссівських центрованих процесів, спектральні щільності яких збігаються до сталої в кожній точці. Задача полягає у дослідженні умов асимптотичної незсуненості відповідних корелограмних оцінок інтегрального типу для перехідної дійснозначної функції H, а також умов їх консистентності у середньому квадратичному.

Означення і попередні відомості

Введемо позначення:

$L_p(R)$, $p \in [1, \infty)$, – простір комплекснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in R)$, інтегрованих у p-му степені за мірою Лебега, з нормою $\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$;

$L_\infty(R)$ – простір обмежених комплексно-значних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in R)$, з нормою $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in R} |\varphi(t)|$;

$Lip_\alpha[a,b]$ – простір дійснозначних функцій $\varphi = (\varphi(t), t \in R)$, які рівномірно на $[a,b] \subset R$ задовольняють умову Ліпшиця з показником $\alpha \in (0,1]$, тобто існують такі сталі $M > 0$ та $\delta > 0$, що $|\varphi(t) - \varphi(s)| \le M|t-s|^\alpha$, як тільки $|t-s| < \delta$, де $t, s \in [a,b]$.

Лінійна система та перехідна функція. Нехай задано *лінійну однорідну систему з перехідною дійснозначною функцією* $H(\tau), \tau \in R$. Тоді реакція системи на вхідний сигнал $x(t), t \in R$, має вигляд

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-s)x(s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} H(s)x(t-s)\,ds. \quad (1)$$

Згідно із загальною термінологією система називається стійкою, якщо $H \in L_1(R)$, та нестійкою, якщо $H \notin L_1(R)$. Ми *розглядаємо одночасно стійкі та нестійкі системи за єдиного припущення* $H \in L_2(R)$.

Якщо $H \in L_2(R)$, то *частотною характеристикою системи* H^* називають перетворення Фур'є–Ланшереля [10] функції H у просторі $L_2(R)$:

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} H(t)\,dt, \lambda \in R.$$

Нагадаємо, що $H^* \in L_2(R)$ і $\|H^*\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|H\|_2$.

Додатково в роботі *на перехідну функцію накладається умова*: $H \in Lip_\alpha(R)$ *при деякому* $\alpha \in (0,1]$, тобто існують такі сталі $M > 0$ і $\delta > 0$, що $|H(t) - H(s)| \le M|t-s|^\alpha$, як тільки $|t-s| < \delta$, де $t, s \in R$. Зауважимо, що в цьому випадку H *є рівномірно неперервною функцією на* R.

Процеси, що подаються на вхід системи. Нехай $X_\Delta = (X_\Delta(t), t \in R)$, $\Delta > 0$, – сім'я вимірних сепарабельних стаціонарних дійснозначних гауссівських центрованих процесів, що збурюють лінійну однорідну систему. Нехай невід'ємні неперервні функції $f_\Delta = (f_\Delta(\lambda), \lambda \in R)$, $\Delta > 0$, є спектральними щільностями процесів X_Δ і задовольняють умови:

$$f_\Delta(\lambda) = f_\Delta(-\lambda), \lambda \in R; \quad (2)$$

$$\sup_{\Delta > 0} \|f_\Delta\|_\infty < \infty; \quad (3)$$

$$f_\Delta \in L_1(R); \quad (4)$$

існує $c \in (0,\infty)$ таке, що

$$\forall a \in (0,\infty): \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{-a \le \lambda \le a} \left| f_\Delta(\lambda) - \frac{c}{2\pi} \right| = 0; \quad (5)$$

$$K_\Delta \in L_1(R), \quad (6)$$

де $K_\Delta(t) = EX_\Delta(s+t)X_\Delta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_\Delta(\lambda)\,d\lambda, \ \lambda \in R,$ – кореляційна функція процесу X_Δ;

$$\forall \delta > 0 \ \lim_{\Delta\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} K_\Delta(t)\,dt = 0; \quad (7)$$

$$\forall \delta > 0 \ \lim_{\Delta\to\infty} \int_{\delta}^{\infty} K_\Delta^2(t)\,dt = 0; \quad (8)$$

при заданому $\alpha \in (0,1]$

$$\exists \delta > 0 \ \lim_{\Delta\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} |K_\Delta(t)|\,|t|^\alpha\,dt = 0. \quad (9)$$

Далі в роботі припускається, що умови (2)–(9) завжди виконані.

Умова (5) показує, в якому саме сенсі слід розуміти "близькість" сім'ї процесів $X_\Delta, \Delta > 0$, до гауссівського білого шуму при $\Delta \to \infty$.

***Приклад* 1.** Умови (2)–(9) задовольняють спектральні щільності f_Δ та відповідні їм кореляційні функції K_Δ процесів X_Δ:

(a) $f_\Delta = \left(\frac{c}{2\pi} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\Delta} \right), \lambda \in R \right)$ та

$$K_\Delta = \left(\frac{c}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{4} \right), \ t \in R \right);$$

(б) $f_\Delta = \left(\frac{c}{2\pi} \frac{\Delta}{\Delta + \lambda^2}, \lambda \in R \right)$ та

$$K_\Delta = \left(\frac{c\sqrt{\Delta}}{2} \exp(-\sqrt{\Delta}\,|t|), t \in R \right).$$

При цьому умова (9) виконується при будь-якому $\alpha \in (0,1]$.

Реакція системи на збурення. Згідно з (1), *відгук системи* на вхідний процес X_Δ описується випадковим процесом

$$Y_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) X_\Delta(t-s)\, ds, t \in R.$$

Зауважимо, що тут і далі всі інтеграли від значень процесів розуміються як середньоквадратичні інтеграли Рімана. Відзначимо також, що процеси X_Δ і Y_Δ є неперервними у середньому квадратичному.

Вигляд оцінки та деякі її властивості. Оцінку для H будемо шукати *у вигляді інтегральної сумісної корелограми*

$$\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cT} \int_0^T Y_\Delta(t+\tau) X_\Delta(t) dt, \tau \in R, \qquad (10)$$

де c — стала з умови (5), T — довжина інтервалу усереднення $[0, T]$.

Зазначимо, що для побудови оцінки процес Y_Δ має спостерігатись на всій дійсній осі.

З вигляду оцінки, для довільних $T > 0$, $\Delta > 0$, при всіх $\tau \in R$, маємо

$$E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{c} EY_\Delta(t+\tau) X_\Delta(t) =$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(\tau - s) H(s)\, ds. \qquad (11)$$

Взагалі кажучи, $E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \neq H(\tau)$, тобто *оцінка* (10) *є зсуненою.* Зауважимо, що середнє оцінки $\hat{H}_{T,\Delta}$ залежить лише від параметра схеми серій Δ і не залежить від довжини інтервалу усереднення T.

Далі *в роботі досліджуються умови асимптотичної незсуненості оцінки* $\hat{H}_{T,\Delta}$ *та умови її консистентності у середньому квадратичному при* $T \to \infty, \Delta \to \infty$. Для цього розглянемо нормовану та центровану емпіричну корелограму

$$\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\,[\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)], \tau \in R.$$

Якщо $H \in L_2(R)$, тоді для всіх $T > 0$, $\Delta > 0$ і $\tau_1, \tau_2 \in R$ кореляційна функція процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ має вигляд (див. [2] або [6])

$$E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\,\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2) = \frac{2\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big[e^{i(\tau_1 - \tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 +$$

$$+ e^{i(\tau_1\lambda_1 + \tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \Big] \times$$

$$\times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2; \qquad (12)$$

де Φ_T — ядро Фейєра:

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\sin \frac{(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right)^2, \lambda \in R;$$

c — стала з умови (5), H^* — перетворення Фур'є—Планшереля функції H у просторі $L_2(R)$.

Основні результати

Позначимо

$$\hat{v}_\Delta(\tau) = [E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)], \tau \in R, \qquad (13)$$

та поставимо питання про збіжність до нуля цієї невипадкової функції при $\Delta \to \infty$. Ця властивість оцінки називається *асимптотичною незсуненістю.*

У поданому нижче твердженні наведені *умови асимптотичної незсуненості оцінки* $\hat{H}_{T,\Delta}$ *при* $\Delta \to \infty$.

Теорема 1. Нехай задане $\alpha \in (0,1]$; $H \in Lip_\alpha(R) \cap L_2(R)$, тоді:

(I) для будь-якого $\tau \in R$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \hat{v}_\Delta(\tau) = 0;$$

(II) для будь-якого $[a, b] \subset R$

$$\lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\tau \in [a,b]} |\hat{v}_\Delta(\tau)| = 0.$$

У наступному твердженні наведені *умови консистентності оцінки* $\hat{H}_{T,\Delta}$ *у середньому квадратичному при довільному прямуванні* $T \to \infty, \Delta \to \infty$.

Теорема 2. Нехай задане $\alpha \in (0,1]$; $H \in Lip_\alpha(R) \cap L_2(R)$, тоді для всіх $\tau \in R$

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} E|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)|^2 = 0.$$

Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. (I) У силу формули (11) та рівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(t)dt = 2\pi f_\Delta(0)$$

при всіх $\tau \in R$ має місце таке представлення для $\hat{v}_\Delta$:

$$\hat{v}_\Delta(\tau) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(\tau - s)H(s)ds = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(s)H(\tau - s)ds =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(s)[H(\tau - s) - H(\tau)]ds +$$

$$+\left(\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c} - 1\right)H(\tau). \qquad (14)$$

Нехай $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, де δ_1 — величина, що фігурує в означенні рівномірної ліпшицевості функції H; δ_2 — величина, що фігурує в умові (9). З (14), нерівності Коші—Буняковського та парності кореляційної функції K_Δ випливає, що

$$|\hat{v}_\Delta(\tau)| \le \frac{1}{c}\left|\int_{|s|<\delta} K_\Delta(s)[H(\tau - s) - H(\tau)]ds\right| +$$

$$+\frac{1}{c}\left|\int_{|s|\ge\delta} K_\Delta(s)[H(\tau - s) - H(\tau)]ds\right| +$$

$$+\left|\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c} - 1\right||H(\tau)| \le$$

$$\le \frac{M}{c}\left|\int_{|s|<\delta} |K_\Delta(s)||s|^\alpha ds\right| + \frac{1}{c}\left|\int_{|s|\ge\delta} K_\Delta(s)H(\tau - s)ds\right| +$$

$$+\frac{1}{c}\left|\int_{|s|\ge\delta} |K_\Delta(s)|\,ds\right||H(\tau)| + \left|\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c} - 1\right||H(\tau)| \le$$

$$\le \frac{M}{c}\int_{-\delta}^{\delta} |K_\Delta(s)||\,s\,|^\alpha ds + \frac{2}{c}\|H\|_2\left[\int_{\delta}^{\infty} K_\Delta^2(s)ds\right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2}{c}\left|\int_{\delta}^{\infty} |K_\Delta(s)|\,ds\right||H(\tau)| + \left|\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c} - 1\right||H(\tau)|.$$

З цієї нерівності, умови (5) і балансних умов (7)—(9) випливає, що для будь-якого $\tau \in R$

$$\lim_{\Delta\to\infty} |\hat{v}_\Delta(\tau)| = 0.$$

Таким чином, пункт (I) теореми 1 доведено.

(II) Оскільки функція H неперервна на будь-якому відрізку $[a,b] \subset R$, то за теоремою Вейєрштрасса вона обмежена на цьому відрізку, тобто

$$\sup_{\tau\in[a,b]} |H(\tau)| < \infty.$$

З цього факту, нерівності

$$\sup_{\tau\in[a,b]} |\hat{v}_\Delta(\tau)| \le \frac{M}{c}\int_{-\delta}^{\delta} |K_\Delta(s)||s|^\alpha ds +$$

$$+\frac{2}{c}\|H\|_2\left[\int_{\delta}^{\infty} K_\Delta^2(s)ds\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{c}\left|\int_{\delta}^{\infty} |K_\Delta(s)|ds\right|\sup_{\tau\in[a,b]} |H(\tau)| +$$

$$+\left|\frac{2\pi f_\Delta(0)}{c} - 1\right|\sup_{\tau\in[a,b]} |H(\tau)|,$$

і балансних умов (7)—(9) випливає, що

$$\lim_{\Delta\to\infty}\sup_{\tau\in[a,b]} |\hat{v}_\Delta(\tau)| = 0.$$

Таким чином, пункт (II) теореми 1 доведено. Теорема 1 доведена повністю.

Для спрощення доведення теореми 2 далі наведемо деякі потрібні факти.

Лема 1. Нехай $H \in L_2(R)$, тоді для всіх $T > 0$, $\Delta > 0$, і $\tau_1, \tau_2 \in R$ має місце нерівність

$$|E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| \le \frac{4\pi\left(\sup\limits_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \|H^*\|_2^2}{c^2}.$$

Доведення леми 1. Будемо оцінювати функцію, визначену формулою (12), розбивши її на два доданки таким чином:

$$|E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| =$$

$$= \left| \frac{2\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) \times \right.$$

$$\times f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$+ \frac{2\pi}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) \times$$

$$\left. \times f_\Delta(\lambda_1) f_\Delta(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \right|.$$

В силу умови (3) та парності ядер Фейєра отримаємо

$$|E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| \le \frac{2\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda_2)|^2 \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda_1)||H^*(\lambda_2)| \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) d\lambda_1 d\lambda_2 \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \left[\| |H^*|^2 * \Phi_T \|_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda_2)| (|H^*| * \Phi_T)(\lambda_2) d\lambda_2 \right].$$

З нерівності Коші–Буняковського, застосованої до другого доданка, а також нерівності Юнга для згорток [11] і того, що $\|\Phi_T\|_1 = 1$, в результаті дістанемо

$$|E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| \le \frac{2\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \times$$

$$\times [\|H^*\|_2^2 \|\Phi_T\|_1 + \|H^*\|_2^2 \|\Phi_T\|_1] =$$

$$= \frac{4\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \|H^*\|_2^2.$$

Зауважимо, що оцінка кореляційної функції процесу $\hat{Z}_{T,\Delta}$ не залежить від параметрів $T>0, \Delta>0$, і значень $\tau_1, \tau_2 \in R$. Тобто при $H \in L_2(R)$ насправді встановлено співвідношення

$$\sup_{T,\Delta>0} \sup_{\tau_1,\tau_2\in R} |E\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_1)\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau_2)| \le$$

$$\le \frac{4\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \|H^*\|_2^2.$$

Таким чином, лему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Використовуючи лему 1, при всіх $\tau \in R$ з представлення

$$E|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)|^2 = E|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)|^2 +$$

$$+ |E\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)|^2 = \frac{E|\hat{Z}_{T,\Delta}(\tau)|^2}{T} + |\hat{v}_\Delta(\tau)|^2,$$

отримаємо оцінку

$$E|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{T} \times \frac{4\pi}{c^2}\left(\sup_{\Delta>0}\|f_\Delta\|_\infty\right)^2 \|H^*\|_2^2 + |\hat{v}_\Delta(\tau)|^2 .$$

З цієї нерівності та пункту (I) теореми 1 для будь-якого $\tau \in R$ при $T > \infty, \Delta > \infty$ випливає

$$E|\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)|^2 \to 0.$$

Таким чином, теорема 2 доведена повністю.

Висновки

У цій роботі розглянуто корелограмні оцінки інтегрального типу для перехідної дійснозначної функції $H \in L_2(R)$ лінійної однорідної системи, яка збурюється сім'єю стаціонарних гауссівських центрованих процесів, які прямують до білого шуму. Вивчено умови асимптотичної незсуненості відповідних оцінок, а також доведено їх консистентність у середньому квадратичному. Результати статті доповнюють відомі факти в задачі корелограмного оцінювання перехідних функцій і мають місце при умовах, менш обмежувальних, ніж для доведення асимптотичної нормальності відповідної оцінки та її похибки (див. [2, 7]).

Отримані результати будуть використовуватися для розв'язання більш загальної задачі, коли до відгуку системи на вхідний сигнал домішується внутрішній шум самої системи.

Зокрема, після встановлення асимптотичної незсуненості, консистентності (ця стаття) та асимптотичної нормальності відповідних корелограмних оцінок і похибки [7] далі планується побудова функціональних довірчих інтервалів для них.

Список літератури

1. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
2. *V.V. Buldygin and Fu Li,* "On asymptotical normality of an estimation of unit impulse responses of linear systems" (I, II), Theor. Probab. and Math. Statist., vol. 54, pp. 17–24, 1997; vol. 55, pp. 29–36, 1997.
3. *Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В.*, Метрические характеристики случайных величин и процессов. – К.: ТВіМС, 1998. – 290 с.
4. *V.V. Buldygin and V.G. Kurotschka*, "On cross-correlogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations", Random Oper. and Stoch. Eq., vol. 7, no. 1, pp. 71–90, 1999.
5. *V. Buldygin et al.,* "Asymptotic normality of cross-correlogram estimates of the response function", Statistical Interference for Stochastic Proc., vol. 7, pp. 1–34, 2004.
6. *Булдигін В.В., Блажієвська І.П.* Про кореляційні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 5. – С. 120–128.
7. *Булдигін В.В., Блажієвська І.П.* Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – № 4. – С. 16–27.
8. *M. Schetzen*, The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. New York: Wiley, 1980, 618 p.
9. *I.P. Blazhievska,* "Correlogram estimation of response functions of linear systems in scheme of some independent samples", Theory of Stochastic Proc., vol. 17 (33), no. 1, pp. 16–27, 2011.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
11. *R.E. Edwards*, Functional analysis: theory and applications. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965, 798 p.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 травня 2014 року