УДК 519.21

І.В. Орловський

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ ДИСКРЕТНОГО ЧАСУ І СИЛЬНО- АБО СЛАБКОЗАЛЕЖНИХ РЕГРЕСОРІВ

Linear regression model with discrete time, long-range/weak dependent random noise and time dependent regressors, which are observed with long *L* range/weak dependent errors, is considered. Parameter estimation of such models is one of the important problems of statistics of random processes. Least squares estimator is chosen for the estimation. The aim of the work is to prove consistency of least squares estimator of such regression model. Theory of stationary Gaussian random sequences with long-range and weak dependence, properties of slowly varying at infinity functions are used to get the results. In particular, asymptotic behavior of slowly varying at infinity functions in the integral sums is a key point in the proof of consistency in case of long-range dependent noise or random errors in regressors. Sufficient conditions for consistency of least squares estimator of regression parameter are obtained in the paper. It makes possible further study of asymptotic properties of least squares estimator of regression parameter.

Keywords: consistency, linear regression model, errors in regressors, least square estimator, long-range dependence, weak dependence.

Вступ

Задача оцінювання параметрів лінійної та нелінійної регресії є важливим завданням статистики випадкових процесів. Серед великої кількості різноманітних моделей для дослідження вибрано лінійну модель регресії з регресорами, які спостерігаються з випадковими помилками. Ця модель є природною для розгляду, оскільки вона враховує специфіку помилок усіх даних, які використовуються при моделюванні. Для оцінювання параметрів такої моделі виберемо оцінку найменших квадратів (о.н.к.), одну з найважливіших і широко вживаних оцінок параметрів регресійних моделей. Асимптотичні властивості о.н.к. параметрів лінійної та нелінійної регресії, без помилок у регресорах, розглядались багатьма авторами, і ми пошлемося лише на праці О.В. Іванова та М.М. Леоненка [1], О.В. Іванова [2], в яких міститься доволі повна бібліографія з цього питання.

Лінійні моделі регресії з випадковими регресорами є менш дослідженими, оскільки введення випадкових помилок у регресорах значно ускладнює вивчення таких моделей. Асимптотичні властивості о.н.к. параметрів лінійних моделей з випадковими регресорами розглядались у [3] і [4]. Ця стаття продовжує ці дослідження, розширюючи їх на випадок, коли час є дискретним, випадкові помилки у регресорах і випадковий шум є слабко- або сильнозалежними, а регресори мають залежні від часу тренди.

Ключовим моментом при доведенні консистентності у випадку сильнозалежного випадкового шуму або випадкових помилок у регресорах є властивість асимптотичної поведінки повільно змінних на нескінченності функцій (п.з.ф.) в інтегральних сумах (лема 2).

Постановка задачі

Метою роботи є подальше вивчення властивостей оцінок параметрів моделей регресії з похибками у регресорах, охоплюючи випадок дискретного часу.

При оцінюванні параметрів регресії важливу роль відіграють асимптотичні властивості використовуваних оцінок. У цій роботі зосереджено увагу на вивченні консистентності – першої властивості, яку потрібно досліджувати, оскільки вона є необхідною для подальшого детальнішого вивчення асимптотичної поведінки оцінок. При цьому стосовно похибок у регресорах і випадкового шуму припускається як слабка, так і сильна залежність.

Лінійна модель регресії з похибками у регресорах та о.н.к. її параметрів

Розглянемо модель регресії

$$X_j = \sum_{i=1}^{q} \theta_i z_{ij} + \varepsilon_j,\ j = \overline{1, N},$$
$$z_{ij} = a_{ij} + y_{ij},\ i = \overline{1, q}, \tag{1}$$

де $\theta^* = (\theta_1,...,\theta_q) \in \mathbb{R}^q$ — вектор невідомих параметрів (* означає транспонування); $\{a_{ij}, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1,q}$ — деякі невипадкові послідовності і

1) y_{ij}, $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,q}$ — незалежні вимірні стаціонарні гаусівські послідовності, $Ey_{ij} = 0$;

2) випадковий шум ε_j, $j \in \mathbb{N}$ — гаусівська стаціонарна послідовність, що не залежить від y_{ij}, $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,q}$, $E\varepsilon_j = 0$.

Означення. О.н.к. невідомого параметра θ, одержаною за спостереженнями $\{X_j, z_{ij}, i = \overline{1,q}, \ j = \overline{1,N}\}$ вигляду (1), називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_N = \widehat{\theta}_N(X_j, z_{ij}, i = \overline{1,q}, \ j = \overline{1,N})$, для якого

$$Q_N(\widehat{\theta}_N) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^q} Q_N(\tau),$$

$$Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \sum_{i=1}^{q}\tau_i z_{ij}\right)^2.$$

Введемо такі позначення:

$$A_j^* = (a_{1j},...,a_{qj}),\ Y_j^* = (y_{1j},..,y_{qj}),$$

$$Z_j = A_j + Y_j,$$

$f_1 \underset{N\to\infty}{\sim} f_2$ означає, що $\frac{f_1(N)}{f_2(N)} \underset{N\to\infty}{\to} 1.$

Тоді о.н.к. $\widehat{\theta}_N$ буде мати вигляд

$$\widehat{\theta}_N = \Lambda_N^{-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Z_j X_j = \theta + \Lambda_N^{-1}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Z_j \varepsilon_j, \quad (2)$$

де $\Lambda_N = (\Lambda_N^{il})_{i,\,l=1}^{q} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Z_j Z_j^*.$

Допоміжні твердження

Тут розглянемо деякі твердження, необхідні для отримання основних результатів роботи.

Нехай для процесів додатково виконується припущення

3) y_{ij}, $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,q}$ — випадкові послідовності, які мають коваріаційні функції (к.ф.) $B_i(j-k) = Ey_{ij}y_{ik}$, $j,k \in \mathbb{N}$, такі, що $\sum_{n=0}^{\infty}|B_i(n)| < \infty.$

Літерами k будемо позначати додатні константи. Нехай також

$$d_N^2 = \mathrm{diag}(d_{iN}^2)_{i=1}^{q},\ d_{iN}^2 = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2,\ i = \overline{1,q}.$$

Введемо додаткові умови на послідовності $\{a_{ij}, j \in \mathbb{N}\}$, $i = \overline{1,q}$:

4) $\lim_{N\to\infty} N^{-1} d_{iN}^2 = k_i$, $0 < k_i < \infty, i = \overline{1,q}$;

5) $\{a_{ij}, j \in \mathbb{N}\}$, $i = \overline{1,q}$ — обмежені послідовності.

Введемо позначення $\sup_{j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| = \widetilde{k_i} < \infty$, $i = \overline{1,q}$.

Запишемо

$$J_N = (J_N^{il})_{i,\,l=1}^{q},\ J_N^{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}a_{lj}.$$

6) $\lim_{N\to\infty} J_N = J$, де $J = (J^{il})_{i=1}^{q}$ — деяка додатно визначена матриця.

Введемо також позначення

$$\Lambda = \mathrm{diag}(B_i(0))_{i=1}^{q} + J.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку Λ_N.

Лема 1. Якщо виконано умови 1, 3–6, то $\Lambda_N \underset{N\to\infty}{\to} \Lambda$, майже напевно (м.н.).

Доведення. Для фіксованих i, l розглянемо загальний елемент матриці Λ_N:

$$\Lambda_N^{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{ij}y_{lj} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}y_{lj} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{ij}a_{lj} +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}a_{lj} = \Delta^{il}(N) + \Delta_i^l(N) + \Delta_l^i(N) + J_N^{il}. \quad (3)$$

Нехай $i \neq l$. Оскільки $B_i(n)B(n) \in l_1(\mathbb{R}^1)$, то

$$E(\Delta^{il}(N))^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B_i(j-k)B_l(j-k) =$$

$$= \frac{B_i(0)B_l(0)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)B_i(k)B_l(k) \leq$$

$$\leq \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} B_i(k)B_l(k) \leq \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\infty}|B_i(k)B_l(k)| = \frac{2b_{il}}{N}. \quad (4)$$

Покладемо $N_n = n^2$. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty} E(\Delta^{il}(N_n))^2 < < \infty$, і, відповідно, $\Delta^{il}(N_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Нехай $N_n \le N \le N_{n+1}$. Тоді

$$|\Delta^{il}(N)| \le \sup_{N_n \le N \le N_{n+1}} |\Delta^{il}(N) - \Delta^{il}(N_n)| + $$
$$+ |\Delta^{il}(N_n)|.$$

Покажемо, що

$$\sup_{N_n \le N \le N_{n+1}} |\Delta^{il}(N) - \Delta^{il}(N_n)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (5)$$

Очевидно, що

$$\Delta^{il}(N) - \Delta^{il}(N_n) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{ij}y_{lj} - \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} y_{ij}y_{lj} =$$
$$= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N_n}\right)\sum_{j=1}^{N_n} y_{ij}y_{lj} + \frac{1}{N}\sum_{j=T_n}^{N} y_{ij}y_{lj} = S_1 + S_2. \quad (6)$$

З того, що $\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, випливає

$$|S_1| \le \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n}\left|\frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} y_{ij}y_{lj}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}|\Delta^{il}(N_n)|.$$

Розглянемо другий доданок (6):

$$ES_2^2 \le \frac{1}{N_n^2}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}}\sum_{k=N_n}^{N_{n+1}} B_i(j-k)B_l(j-k) \le$$
$$\le \frac{2}{N_n^2}\sum_{k=0}^{N_{n+1}-N_n}(N_{n+1} - N_n - k)|B_i(k)B_l(k)| \le$$
$$\le \frac{2b_{il}(N_{n+1} - N_n)}{N_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4b_{il}}{n^3}.$$

З останнього легко отримати, що $S_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н., і тому

$$\Delta^{il}(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (7)$$

Доведемо, що

$$\Delta_i^l(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}, i, l = \overline{1,q}. \quad (8)$$

Очевидно, $E\Delta_i^l(N) = 0$,

$$E(\Delta_i^l(N))^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ij}a_{ik}B_l(j-k) \le$$
$$\le \frac{\tilde{k}_i^2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}|B_l(j-k)| \le \frac{2\tilde{k}_i^2 c_l}{N}, \quad (9)$$

де

$$c_l = \sum_{k=0}^{\infty}|B_l(n)|, l = \overline{1,q}. \quad (10)$$

Покладемо $N_n = n^2$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_i^l(N_n))^2 < < \infty$, і, відповідно,

$$\Delta_i^l(N_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}$$

Подальше доведення (8) є аналогічним до (7).

З (7), (8) та умови 6 випливає, що при $i \ne l$, $\Lambda_N^{il} \underset{N\to\infty}{\to} J^{il}$ м.н.

Нехай тепер $i = l$. Тоді (3) перепишеться у вигляді $\Lambda_N^{ii} = \Delta^{ii}(N) + 2\Delta_i^i(N) + J_N^{ii}$.

Використовуючи міркування, які використовувалися при доведенні (7), можна отримати, що

$$\Delta^{ii}(N) \underset{N\to\infty}{\to} B_i(0) \text{ м.н.} \quad (11)$$

Дійсно, $E\Delta^{ii}(T) = B_i(0)$, а за формулою Ісерліса (див., наприклад [5]) матимемо

$$E[\Delta^{ii}(T) - B_i(0)]^2 =$$
$$= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B_i^2(j-k) \le \frac{4c_iB_i(0)}{N}.$$

Наступні кроки доведення (11) повторюють доведення (7).

Тоді з (8), (11) та умови 6 випливає, що $\Lambda_T^{ii} \underset{T\to\infty}{\to} B_i(0) + J^{ii}$ м.н. і лему 1 доведено.

З доведеної леми випливає таке твердження:

***Наслідок* 1.** Якщо виконано умови 1, 3–6, то для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $N_0 = N_0(\omega)$, що для всіх $N > N_0$ о.н.к. $\hat{\theta}_N$, яку задано (2), є визначеною.

Сформулюємо одну властивість п.з.ф., яка буде використовуватися далі (детальніше стосовно п.з.ф. див. [6]).

Лема 2. Нехай число $\eta \ge 0$ і вимірна функція $f(t)$, визначена на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, такі, що інтеграл $\int_0^\beta \frac{f(t)}{t^\eta}dt$ збігається. Нехай п.з.ф. L обмежена на кожному скінченному інтервалі з

$\mathbb{R}_+$, послідовність $\{m_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}_+$ є монотонно зростаючою, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=+\infty$, та задано дві серії дійсних чисел $t_{nk}, k=\overline{0,n}, n\in\mathbb{N}$, t'_{nk}, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$, таких, що

1) $0=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nn}=\beta, n\in\mathbb{N}$;

2) $t'_{nk}\in[t_{n(k-1)},t_{nk}], k=\overline{1,n}, n\in\mathbb{N}$;

3) $\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_{nk}\underset{n\to\infty}{\to}0$, де $\Delta t_{nk}=t_{nk}-t_{n(k-1)}$.

Тоді при $\eta>0$ виконується співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n}L(nt'_{nk})f(t'_{nk})\Delta t_{nk}\underset{n\to\infty}{\sim}L(n)\int_0^\beta f(t)dt.$$

У випадку $\eta=0$ для виконання цього співвідношення достатньо неспадання на півосі $(0,\infty)$ функції L.

Доведення. Зафіксуємо $0<\varepsilon<1$. Нехай $A_{n\varepsilon}=\{k: t_{nk}\le\varepsilon\}$. Тоді при $\eta>0$ маємо

$$\left|\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}L(m_nt'_{nk})f(t'_{nk})\Delta t_{nk}\right|\le$$

$$\le\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}(m_nt'_{nk})^\eta L(m_nt'_{nk})\frac{|f(t'_{nk})|}{(m_nt'_{nk})^\eta}\Delta t_{nk}\le$$

$$\le(m_n)^{-\eta}\sup_{0\le u\le m_n\varepsilon}u^\eta L(u)\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}\frac{|f(t'_{nk})|}{(t'_{nk})^\eta}\Delta t_{nk}\le$$

$$\le(m_n)^{-\eta}\sup_{0\le u\le m_n}u^\eta L(u)\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}\frac{|f(t'_{nk})|}{(t'_{nk})^\eta}\Delta t_{nk}\underset{n\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim}L(m_n)\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}\frac{|f(t'_{nk})|}{(t'_{nk})^\eta}\Delta t_{nk}\underset{n\to\infty}{\sim}L(m_n)\int_0^\varepsilon\frac{|f(t)|}{t^\eta}dt.$$

З цих міркувань та властивостей інтегральних сум випливає також, що існують такі $\tilde c_k<\infty, k=1,2,3$, що для достатньо великих n

$$\left|\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}\frac{L(m_nt'_{nk})}{L(m_n)}f(t'_{nk})\Delta t_{nk}\right|\le\tilde c_1\int_0^\varepsilon\frac{|f(t)|}{t^\eta}dt; \quad (12)$$

$$\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}\le\tilde c_2\int_0^\varepsilon|f(t)|dt;$$

$$\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus A_{n\varepsilon}}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}\le\tilde c_3\int_\varepsilon^\beta|f(t)|dt.$$

Розглянемо різницю

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{L(m_nt'_{nk})}{L(m_n)}f(t'_{nk})\Delta t_{nk}-\int_0^\beta f(t)dt\right|\le$$

$$\le\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}\frac{L(m_nt'_{nk})}{L(m_n)}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}+$$

$$+\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}+$$

$$+\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus A_{n\varepsilon}}\left|\frac{L(m_nt'_{nk})}{L(m_n)}-1\right||f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n}f(t'_{nk})\Delta t_{nk}-\int_0^\beta f(t)dt\right|\le$$

$$\le\tilde c_1\int_0^\varepsilon\frac{|f(t)|}{t^\eta}dt+\tilde c_2\int_0^\varepsilon|f(t)|dt+$$

$$+\tilde c_3\sup_{\varepsilon\le u\le\beta}\left|\frac{L(m_nu)}{L(m_n)}-1\right|\int_\varepsilon^\beta|f(t)|dt+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n}f(t'_{nk})\Delta t_{nk}-\int_0^\beta f(t)dt\right|=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4. \quad (13)$$

Доданок $I_3\underset{n\to\infty}{\to}0$ завдяки тому, що

$$\sup_{\varepsilon\le u\le\beta}\left|\frac{L(m_nu)}{L(m_n)}-1\right|\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Переходячи у правій частині рівності (13) до границі спочатку за $n\to\infty$, а потім за $\varepsilon\to0$, отримаємо необхідний результат.

Якщо $\eta=0$, то із врахуванням неспадності L матимемо

$$\left|\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}L(m_nt'_{nk})f(t'_{nk})\Delta t_{nk}\right|\le$$

$$\le L(m_n\varepsilon)\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}\le$$

$$\le L(m_n)\sum_{k\in A_{n\varepsilon}}|f(t'_{nk})|\Delta t_{nk}\underset{n\to\infty}{\sim}L(m_n)\int_0^\varepsilon|f(t)|dt.$$

З останнього випливає (12) з $\eta=0$. Подальший хід міркувань очевидний.

7) $y_{ij}, j\in\mathbb{N}, i=\overline{1,q}$ – послідовності, що задовольняють умову сильної залежності, тобто к.ф. $B_i(n)=\dfrac{L_i(|n|)}{|n|^{\alpha_i}}, n\in\mathbb{Z}$, де $L_i(t), t>0$ –

п.з.ф., обмежені на кожному скінченному інтервалі з $(0,\infty)$, $\alpha_i \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $i=\overline{1,q}$.

Лема 3. Якщо виконано умови 1, 4–7, то $\Lambda_N \underset{N\to\infty}{\to} \Lambda$, м.н.

Доведення. Аналогічно доведенню леми 1 розглянемо поведінку доданків з (3).

Нехай $i \neq l$. Тоді отримаємо

$$E(\Delta^{il}(N))^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B_i(j-k)B_l(j-k) =$$

$$= \frac{B_i(0)B_l(0)}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)B_i(k)B_l(k) =$$

$$= \frac{B_i(0)B_l(0)}{N} + \frac{2}{N^{\alpha_i+\alpha_l}}\sum_{k=1}^{N-1} L_i(k)L_l(k)\,\frac{1-\frac{k}{N}}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha_i+\alpha_l}}\,\frac{1}{N}.$$

Застосуємо до останньої суми лему 2, взявши як $f(t)=\frac{1-t}{t^{\alpha_i+\alpha_l}}$, яка задовольняє умови леми завдяки тому, що $\alpha_i \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$, $i=\overline{1,q}$. Тоді, взявши до уваги, що

$$\int_0^1 \frac{(1-t)dt}{t^{\alpha_i+\alpha_l}} = \frac{1}{(1-\alpha_i-\alpha_l)(2-\alpha_i-\alpha_l)},$$

отримаємо

$$E(\Delta^{il}(N))^2 \underset{T\to\infty}{\sim} \frac{2B_i(N)B_l(N)}{(1-\alpha_i-\alpha_l)(2-\alpha_i-\alpha_l)}. \quad (14)$$

Покладемо $N_n = n^{\left[\frac{1}{2\min\{\alpha_i,\alpha_l\}}\right]+1}$, де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Тоді $\sum_{n=0}^{\infty} E(\Delta^{il}(N_n))^2 < \infty$, і, відповідно, $\Delta^{il}(N_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Нехай $N_n \le N \le N_{n+1}$. Тоді маємо

$$|\Delta^{il}(N)| \le \sup_{N_n \le N \le N_{n+1}} |\Delta^{il}(N) - \Delta^{il}(N_n)| +$$

$$+|\Delta^{il}(N_n)|.$$

Покажемо, що виконується (5).

За аналогією до S_1 з леми 1, отримаємо

$$|S_1| \le \frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} \times$$

$$\times \left|\frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n} y_{ij}y_{lj}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\left[\frac{1}{\alpha_i+\alpha_l}\right]+1}{n}\,|\Delta^{il}(N_n)|,$$

і, відповідно, $S_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Розглянемо другий доданок (6):

$$|S_2| \le \frac{1}{N_n}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}} |y_{ij}y_{lj}| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N_n}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}} y_{ij}^2 + \frac{1}{N_n}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}} y_{lj}^2\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{N_{n+1}-N_n}{N_n}(B_l(0)+B_i(0)) + \right.$$

$$+\frac{1}{N_n}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}}(y_{ij}^2 - B_i(0)) +$$

$$\left. +\frac{1}{N_n}\sum_{j=N_n}^{N_{n+1}}(y_{lj}^2 - B_l(0))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(S_3(n) + S_4^i(n) + S_4^l(n)).$$

Очевидно, що $S_3(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. З іншого боку, для $i=\overline{1,q}$, $S_4^i(n) = \frac{N_{n+1}}{N_n}S_5^i(n+1) - S_5^i(n)$, де

$$S_5^i(n) = \frac{1}{N_n}\sum_{j=1}^{N_n}(y_{ij}^2 - B_i(0)).$$

Покажемо, що

$$S_5^i(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (15)$$

Використовуючи формулу Іcерліса та лему 2, отримаємо

$$E(S_5^i(n))^2 =$$

$$= \frac{2}{N_n^2}\sum_{j=1}^{N_n}\sum_{k=1}^{N_n} B_i^2(j-k) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2B_i^2(N_n)}{(1-2\alpha_i)(1-\alpha_i)}.$$

Оскільки $N_n = n^{\left[\frac{1}{2\min\{\alpha_i,\alpha_l\}}\right]+1}$, тоді з попередньої еквівалентності випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty} E(S_5^i(n))^2 < \infty$ і, відповідно, (15) виконується.

З останнього легко отримати, що $S_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н., і тому

$$\Delta^{il}(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (16)$$

Доведемо, що

$$\Delta_i^l(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.}, i,l=\overline{1,q}. \quad (17)$$

Очевидно, $E\Delta_i^l(N)=0$,

$$E(\Delta_i^l(N))^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ij}a_{ik}B_l(j-k) \le$$

$$\le \frac{\tilde{k}_i^2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} |B_l(j-k)| \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{2\tilde{k}_i^2 B_l(N)}{(1-\alpha_l)(2-\alpha_l)}. \quad (18)$$

Покладемо $N_n = n^{\left[\frac{1}{\alpha_l}\right]+1}$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_i^l(N_n))^2 <$ $< \infty$, і, відповідно, $\Delta_i^l(N_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Подальше доведення (17) є аналогічним до (16).

З (16), (17) та умови 6 випливає, що при $i \ne l$, $\Lambda_N^{il} \underset{N\to\infty}{\to} J^{il}$ м.н.

При $i=l$ необхідно лише отримати, що

$$\Delta^{ii}(N) \underset{N\to\infty}{\to} B_i(0) \text{ м.н.} \quad (19)$$

Дійсно, $E\Delta^{ii}(T) = B_i(0)$, а за формулою Ісерліса маємо

$$E[\Delta^{ii}(T) - B_i(0)]^2 =$$

$$= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B_i^2(j-k) \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{4B_i(N)}{(1-\alpha_i)(2-\alpha_i)}.$$

Наступні кроки доведення (19) повторюють доведення (16).

Тоді з (17), (19) та умови 6 випливає, що

$$\Lambda_T^{ii} \underset{T\to\infty}{\to} B_i(0) + J^{ii} \text{ м.н.},$$

і лему 3 доведено.

З доведеної леми випливає наступне твердження.

***Наслідок* 2.** Якщо виконано умови 1, 4–7, то для майже всіх $\omega \in \Omega$ існує таке $N_0 =$ $= N_0(\omega)$, що для всіх $N > N_0$ о.н.к. $\hat{\theta}_N$, яку задано (2), є визначеною.

Сильна консистентність о.н.к.

Зробимо додаткове припущення стосовно процесу ε_j, $j \in \mathbb{N}$:

8) випадкова послідовність ε_j, $j \in \mathbb{N}$, має підсумовану к.ф. $B(j-k) = E\varepsilon(j)\varepsilon(k)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |B(n)| < \infty$.

Теорема 1. Якщо виконано умови 1–6 і 8, то о.н.к. $\hat{\theta}_N$ є сильно консистентною оцінкою параметра θ, тобто $\hat{\theta}_N \underset{N\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. З леми 1 і подання о.н.к. у вигляді (2) випливає, що для доведення теореми достатньо показати, що

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} Z_j \varepsilon_j \underset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \quad (20)$$

Для фіксованого i матимемо

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} z_{ij}\varepsilon_j = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} a_{ij}\varepsilon_j + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} y_{ij}\varepsilon_j =$$

$$= S_6(N) + S_7(N).$$

Доведення того, що $S_6(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. та $S_7(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. повторюють доведення для $\Delta_i^l(N)$ та $\Delta^{il}(N)$ з леми 1 відповідно.

Теорема 2. Якщо виконано умови 1, 2 та 4–8, то $\hat{\theta}_N \underset{N\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. За аналогією до доведення теореми 1 нам достатньо показати, що за умов теореми виконується (20). Доведення того, що $S_6(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. і $S_7(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. повторюють доведення для $\Delta_i^l(N)$ та $\Delta^{il}(N)$ з леми 1 відповідно.

Нехай замість 8 виконано таку умову:

9) випадкова послідовність ε_j, $j \in \mathbb{N}$, має к.ф. $B(n) = \frac{L(|n|)}{|n|^{\alpha}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $L(t)$, $t > 0$, – п.з.ф., яка обмежена на кожному скінченному інтервалі з $(0,\infty)$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Теорема 3. Якщо виконано умови 1–6 та 9, то $\hat{\theta}_N \underset{N\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. За аналогією до доведення теореми 1 нам достатньо показати, що за умов теореми виконується (20). Доведення того, що $S_6(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. і $S_7(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. повторюють доведення для $\Delta_i^l(N)$ з леми 3 і $\Delta^{il}(N)$ з леми 1 відповідно.

Теорема 4. Якщо виконано умови 1, 2, 4—7 і 9, то $\widehat{\theta}_N \underset{N\to\infty}{\to} \theta$ м.н.

Доведення. За аналогією до доведення теореми 1 нам достатньо показати, що за умов теореми виконується (20). Доведення того, що $S_6(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. і $S_7(N) \underset{N\to\infty}{\to} 0$ м.н. повторюють доведення для $\Delta_i^l(N)$ та $\Delta^{il}(N)$ з леми 3 відповідно.

Висновки

У роботі отримані достатні умови консистентності о.н.к. параметрів лінійних моделей регресії з дискретним часом і регресорами, які залежать від часу і спостерігаються з похибками, що задовольняють умови сильної або слабкої залежності. Це дає змогу охопити доволі великий клас моделей, до яких можна застосовувати представлені результати, і відкриває можливість подальшого вивчення асимптотичних властивостей о.н.к.

Крім того, отримано важливу властивість асимптотичної поведінки п.з.ф. в інтегральних сумах (лема 2), яка може стати у пригоді при дослідженні асимптотичних властивостей характеристик моделей з дискретним часом, в яких присутній сильнозалежний шум.

Наступним кроком досліджень є знаходження достатніх умов асимптотичної нормальності о.н.к. для моделей з дискретним часом та помилками у регресорах й випадковим шумом, що є сильно- або слабкозалежними випадковими послідовностями.

Список літератури

1. *Иванов А.В., Леоненко Н.Н.* Статистический анализ случайных полей. — К.: Вища шк., 1986. — 216 с.
2. *A.V. Ivanov,* Asymptotic Theory of Nonlinear Regression. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1997, 328 p.
3. *Дороговцев А.Я.* Теория оценок параметров случайных процессов. — К.: Вища шк., 1982. — 192 с.
4. *Голубовська Л.П., Іванов О.В., Орловський І.В.* Асимптотичні властивості оцінки параметрів лінійної регресії у випадку сильнозалежних регресорів // Наук. вісті НТУУ "КПІ". — 2012. — № 4. — С. 26—33.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука. — 1985. — 144 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 березня 2014 року