УДК 519.21

Ю.О. Грегуль

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ БАУМА–КАЦА З OSV-ФУНКЦІЯМИ

In this paper conditions for the convergence of series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1}L(n)P(|S_n| \geq n^{1/r}\varepsilon)$ for arbitrary $\varepsilon > 0$, different values of parameters $t \geq 0$, $0 < r < 2$, and functions L are considered. Such series appear by investigating complete convergence, as well as by studying different questions on large deviations in limit theorems of probability theory. Sufficient conditions for the convergence of such a series for not necessarily monotone and continuous slowly varying functions L are obtained. For $r = 1$ and non-monotone function L condition $E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty$ does not imply the existence of the first moment. This mean that in general case it is necessary to consider series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n)P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n^{1/r})$ which includes medians of sums $\mathrm{med}(S_n)$ instead of generalized Baum–Katz series $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n)P(|S_n| \geq \varepsilon n^{1/r})$. In order to get rid of medians it is necessary to add an assumption on the finiteness of the first moment. This mean that obtained results extend one result of Heyde and Rohatgi to the case of non-monotone slowly varying functions L, for $t \geq 0$. Moreover, we enlarge the class of functions for which sufficient conditions for the convergence of introduced series, for $t \geq 0$, are found. It turns out that appropriate results hold true not only for monotone and for continuous slowly varying functions, but also for a more wide class of functions, namely, OSV-functions. Generalization of main result for the case of normalizing sequences, that are Marcinkiewicz–Zygmund sequences, is also presented. In this case, depending on r, two additional moment assumptions are imposed in order to avoid medians.

Keywords: Baum–Katz series, convergence of series, complete convergence, slowly varying functions, OSV-functions.

Вступ

Нас цікавлять умови збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1}L(n)P(|S_n| \geq n^{1/r}\varepsilon) \tag{1}$$

для різних значень параметрів $t \geq 0$ і $0 < r < 2$ і функцій L, де $S_1 = X_1, S_n = X_1 + \ldots + X_n, n > 1$ — часткові суми послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{X_k, k \geq 1\}$.

При $t = 1$ та $L(x) = 1$ збіжність ряду (1) буде означати повну збіжність до нуля послідовності $\{S_n / n^{1/r}, n \geq 1\}$ [1]. Зазначимо також, що при $t < 0$ ряд (1) збіжний для будь-яких послідовностей випадкових величин і функцій $L(x)$ при довільному $\varepsilon > 0$. Автори [1] знайшли достатню умову збіжності ряду (1) для $t = 1$, $r = 1$ та $L(x) = 1$, а саме: послідовність $\{S_n / n, n \geq 1\}$ збігається до нуля повністю, якщо $E[X_1] = 0$ та $E[X_1^2] < \infty$. Необхідність цієї умови було доведено в [2].

Наступні дослідження проведені для $t = 0$, $r = 1$ та $L(x) = 1$ у [3]. Згодом у [4] і [5] узагальнили результати Сюя, Роббінса, Ердеша та Спіцера для $t \geq 0$, $0 < r < 2$ та $L(x) = 1$.

Вагомим внеском у дослідження збіжності ряду (1) стала праця [6], в якій були знайдені необхідні та достатні умови збіжності ряду (1) для $t \geq 0$, $0 < r < 2$ і невід'ємної неспадної неперервної $L(x)$. Авторами було зроблено узагальнення одного з результатів Хейді та Рохатгі на випадок немонотонної функції L. У праці [7] було знайдено достатні умови збіжності ряду (1) для $t = 0$, $r = 1$ і повільно змінної функції необов'язково неперервної повільно змінної функції L. Але якщо функція L не є монотонно зростаючою, то з умови $E[|X| L(|X|)] < \infty$ не випливає існування першого моменту. Це у свою чергу означає, що у загальному випадку замість ряду (1) необхідно вивчати ряд, який включає медіани сум $\mathrm{med}(S_n)$.

Постановка задачі

Мета цієї роботи – узагальнити результати, отримані в [7], а саме: розглянути випадок не тільки $t=0$, як у [7], але й $t>0$ для повільно змінної функції L; розширити клас функцій L, для яких знайти достатні умови збіжності ряду (1) для $t \ge 0$; довести, що результати праці [7] справедливі не тільки для необов'язково монотонних або неперервних повільно змінних функцій, а й для більш широкого класу – класу OSV-функцій; навести узагальнення для випадку нормувальних послідовностей Марцинкевича–Зігмунда.

Основні результати

Теорема 1. Нехай L невід'ємна повільно змінна функція, $t \ge 0$. Якщо

$$E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty, \qquad (2)$$

то для будь-якого $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n) < \infty. \qquad (3)$$

Крім того, якщо виконується умова (2), і, додатково, $E[X]=0$, то ряд (3) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$ і маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty. \qquad (4)$$

При доведенні результатів нам знадобляться такі факти:

Лема. Для довільної повільно змінної функції $L(x)$ і для будь-якого $\gamma > 0$ знайдуться повільно змінні функції $L_1(x)$ та $L_2(x)$ такі, що $L(x) \sim L_1(x)$ і $L(x) \sim L_2(x)$, $x \to \infty$, і $L_1(x)/x^{\gamma}$ – монотонно спадає, а $L_2(x) x^{\gamma}$ – монотонно зростає при $x \to \infty$.

Цей факт можна знайти у [8].

Тому при доведенні теорем і тверджень, що будуть наведені далі, ми будемо замінювати функцію $L(x)$ на еквівалентні при $x \to \infty$ функції $L_1(x)$ і $L_2(x)$, які мають відповідну властивість монотонності. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що існують додатні константи C_1, C_2 і C_3, для яких

$$C_1 L_1(x) \le L(x) \le C_2 L_2(x) \le C_3 L_1(x),\ x > 0.$$

Для доведення теореми нам також знадобляться кілька допоміжних тверджень, перше твердження було доведене в [7].

Твердження 1. Нехай $t \ge 0$. Тоді для будь-якої випадкової величини X та будь-якого $a > 0$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X| > na) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty. \qquad (5)$$

Твердження 2. Нехай X^s – симетризація випадкової величини X. Тоді

$$E[|X^s|^{t+1} L(|X^s|)] < \infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty.$$

Доведення. Згідно із твердженням 1 для довільної випадкової величини X та $a > 0$ виконуються такі співвідношення:

$$E[|X^s|^{t+1} L(|X^s|)] < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X^s| > an) < \infty$$

та

$$E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X| > an) < \infty.$$

Отже, для доведення твердження 2 достатньо показати, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X^s| > an) < \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X| > an) < \infty.$$

Для цього використаємо слабкі нерівності симетризації [9]:

$$\frac{1}{2} P(|X - \mathrm{med}(X)| > x) \le$$

$$\le P(|X^s| > x) \le 2P\left(|X| > \frac{x}{2}\right)$$

для $x > 0$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t} L(n) P(|X| > an)$ збігається для довільного $a > 0$. Тоді, використавши відповідну слабку нерівність симетризації, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X^s| > n) \le 2\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P\left(|X| > \frac{n}{2}\right),$$

що і доводить збіжність ряду із симетризованих випадкових величин.

Припустимо тепер, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X^s| > > an)$ – збіжний. Застосувавши відповідну нерівність симетризації, отримаємо

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X - \mathrm{med}(X)| > an) < \infty,$$

тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X| > n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P(|X - \mathrm{med}(X) + \mathrm{med}(X)| > n) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P\left(|X - \mathrm{med}(X)| > \frac{n}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^t L(n) P\left(|\mathrm{med}(X)| > \frac{n}{2}\right) < \infty,$$

оскільки, починаючи з деякого номера n, всі доданки у другому ряді дорівнюють нулю.

Доведення теореми 1. Розглянемо симетричні випадкові величини $\{X_n, n \ge 1\}$. Покладемо для $n \ge 1$ $Y_{k,n} = X_k I\{|X_k| \le n\}$, $k = 1, 2, ..., n$, і $S'_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{k,n}$. Використавши нерівність Чебишева, отримуємо

$$P(|S_n| > \varepsilon n) \le \frac{varY_{1,n}}{n\varepsilon^2} + nP(|X| > n).$$

Звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| > \varepsilon n) \le$$

$$\le C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L_1(n) P(|S_n| > \varepsilon n) \le$$

$$\le \frac{C_3}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} L_1(n) \mathrm{var} Y_{1,n} +$$

$$+ C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^t L_1(n) P(|X| > n).$$

Другий ряд збігається згідно з твердженням 1. Оцінимо перший ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} L_1(n) \mathrm{var} Y_{1,n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} L(n) E[Y_{1,n}^2] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} L_1(n) E[X^2 I\{|X| \le n\}] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} L_1(n) \sum_{k=1}^{n} E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} n^{t-2} L_1(n)\right) E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty} k^{t-1} L_1(k) E[X^2 I\{k-1 < |X| \le k\}] \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty} n^{t-1} L_1(n) \int_{k-1<|X|\le k} |X|^2 \, dP \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1<\|X|\le k} |X|^{t+1} L_1(|X|) dP =$$

$$= CE[|X|^{t+1} L_1(|X|)].$$

Отже, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L_1(n) P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty. \tag{6}$$

Для випадку симетричних випадкових величин теорему доведено.

Нехай тепер $\{X_n, n \ge 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо $E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty$, то з твердження 2 випливає, що $E[|X^s|^{t+1} L(|X^s|)] < \infty$. Тому згідно з доведеною частиною теореми отримуємо $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n^s| > \varepsilon n) < \infty$. Використавши слабкі нерівності симетризації, доводимо збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n).$$

Ми довели, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n - - \mathrm{med}(S_n)| > \varepsilon n)$ збігається, оскільки виконується умова $E[|X|^{t+1} L(|X|)] < \infty$.

Покажемо, що ряд (3) збігається. При додатковій умові $E[X] = 0$ виконується посилений закон великих чисел і $\frac{S_n}{n} \to 0$ майже напевно. Звідси також випливає закон великих чисел для збіжності за ймовірністю, тобто $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$, звідки отримуємо $\frac{\text{med}(S_n)}{n} \to 0, n \to \infty$.

Розглянемо ймовірність

$$P(|S_n| > n\varepsilon) \le P\left(|S_n - \text{med}(S_n)| > \frac{n\varepsilon}{2}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{|\text{med}(S_n)|}{n} > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Другий доданок дорівнює нулю починаючи з деякого номера n. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| > \varepsilon n) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P\left(|S_n - \text{med}(S_n)| > \frac{\varepsilon n}{2}\right) < \infty.$$

Звідки отримуємо, що ряд (3) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$. Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер більш широкий клас функцій – OSV-функції, нагадаємо означення.

***Означення* 1.** Функція $\psi(x)$ називається OSV-функцією [10], якщо ψ-вимірна, додатна для достатньо великих аргументів і

$$\sup_{\lambda>0} \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(\lambda x)}{\psi(x)} < \infty. \quad (7)$$

Зрозуміло, що будь-яка повільно змінна функція буде OSV-функцією.

Теорема 2. Нехай $\psi(x)$ – OSV-функція, $t \ge 0$. Якщо

$$E[|X|^{t+1}\ \psi(|X|)] < \infty, \quad (8)$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n - \mu\varepsilon\delta(S_n)| > \varepsilon n) < \infty. \quad (9)$$

Крім того, якщо виконується умова (8), $t \ge 0$ та, додатково, $E[X] = 0$, то ряд (9) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$ і маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n| > \varepsilon n) < \infty. \quad (10)$$

Доведення теореми 2. Доведення теореми ґрунтується на такій лемі про взаємозв'язок між повільно змінними функціями та OSV-функціями [11].

Лема 2. Додатна вимірна функція ψ є OSV-функцією на $[A;\infty)$ тоді і тільки тоді, коли ця функція може бути подана у вигляді $\psi(x) = L(x)\theta(x)$, $x \ge A$, де L – повільно змінна функція та θ така, що $\theta(x)$ та $\frac{1}{\theta(x)}$ – обмежені функції на $[A;\infty)$.

Зрозуміло, що доведення теореми 2 є аналогічним доведенню теорем 1 і 2 у [7], внаслідок подання функції ψ, вказаним у лемі 2.

Аналогічні результати можна отримати і для нормування Марцинкевича–Зігмунда.

Теорема 3. Нехай $\psi(x)$ – OSV-функція, $t \ge 0$, $0 < r < 2$. Якщо

$$E[|X|^{r(t+1)}\ \psi(|X|^r)] < \infty, \quad (11)$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n - \text{med}(S_n)| > \varepsilon n^{1/r}) < \infty. \quad (12)$$

Якщо $0 < r < 1$ та $E[|X|^{r(t+1)}\ \psi(|X|^r)] < \infty$, $E[|X|^r] < \infty$, то ряд (12) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$ та, крім того, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n| > \varepsilon n^{1/r}) < \infty. \quad (13)$$

Якщо $1 \le r < 2$ і $E[|X|^{r(t+1)}\ \psi(|X|^r)] < \infty$, $E[|X|^r] < \infty$, та, додатково, $E[X] = 0$, то ряд (12) збігається для будь-якого $\varepsilon > 0$ та, крім того, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n| > \varepsilon n^{1/r}) < \infty.$$

Зауваження. Щоб позбутися медіан у ряді (12), необхідно розглядати два випадки значень, а саме: для випадку $0 < r < 1$ варто вимагати додаткову умову $E[|X|^r] < \infty$, а для $1 \le r < 2$ цієї умови недостатньо і потрібно додатково припустити, що $E[X] = 0$.

Висновки

Для послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин було розглянуто ряди $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} L(n) P(|S_n| \geq n\varepsilon)$, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} \psi(n) P(|S_n| \geq$ $\geq n^{1/r}\varepsilon)$ з параметрами $t \geq 0$, $0 < r < 2$, та повільно змінними функціями L, і OSV-функціями ψ.

Теорема 1 є узагальненням одного з результатів Хейді та Рохатгі на випадок немонотонної функції L, а саме: розглянуто випадок не тільки $t = 0$, як у [7], але і $t > 0$ для повільно змінної функції L. В теоремі 2 розширено клас функцій L, для яких знайдено достатні умови збіжності ряду (1) для $t \geq 0$. Виявилося, що попередні результати справедливі не тільки для необов'язково монотонних або неперервних повільно змінних функцій, а й для більш широкого класу – класу OSV-функцій. У теоремі 3 наведено узагальнення для випадку нормувальних послідовностей Марцинкевича–Зігмунда.

У подальшому планується розглянути замість виразу $n^{1/r}$ у ряді (1) правильно змінну функцію $\varphi(n)$, а також іншу характеристику збіжності в законі великих чисел, згідно з якою $n^{t-1} L(n) P(|S_n| \geq n^{1/r}\varepsilon) \to 0.$ при $n \to \infty$.

Список літератури

1. *P.L. Hsu and H. Robbins,* "Complete convergence and the law of large numbers", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 33, pp. 25–31, 1947.
2. *P. Erdös,* "On a theorem of Hsu and Robbins", Ann. Math. Statist., vol. 20, pp. 287–291, 1949.
3. *F. Spitzer,* "A combinatorial lemma and its application to probability theory", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 82, pp. 323–339, 1956.
4. *M. Katz,* "The probability in the tail of distribution", Ann. Math. Statist., vol. 34, pp. 312–318, 1963.
5. *L.E. Baum and M. Katz,* "Convergence rates in the law of large numbers", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 120, pp. 108–123, 1965.
6. *C.C. Heyde and V.K. Rohatgi,* "A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers", Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 63, pp. 73–82, 1967.
7. *Грегуль Ю., Клесов О.* Збіжність узагальнених рядів Спіцера // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 4. – С. 34–38.
8. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
9. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1965. – 720 с.
10. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 442 с.
11. *D. Drasin and E. Seneta,* "A generalization of slowly varying function", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 96, no. 3, pp. 470–472, 1986.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
15 травня 2014 року