DOI: 10.20535/1810-0546.2018.5.147067
УДК 66.045:51-74

І.Д. Лучейко, Р.В. Коцюрко*
Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя, Тернопіль, Україна

АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ “ТЕПЛООБМІННИК ТИПУ “ЗМІШУВАННЯ–ЗМІШУВАННЯ” + ТЕПЛОПЕРЕДАЧА”

Проблематика. Математичне моделювання неперервних технологічних процесів у нестаціонарних умовах, спричинених діями різноманітних дестабілізуючих факторів, – актуальна проблема. При цьому аналітичні розв’язки мають суттєві переваги над числовими, оскільки дають змогу з’ясувати природу причинно-наслідкових зв’язків у аналізованих властивостях об’єкта моделювання і – як практичний результат – дати фізично обґрунтовані рекомендації щодо підвищення ефективності його функціонування. Для теплообмінних процесів причиною нестаціонарності, зокрема, є можливі коливання температур теплоносіїв (ТН) на входах проточного теплообмінного апарата (ТА). Це призводить, як правило, до зниження ефективності роботи ТА. Тому розрахунок його амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) має вагоме значення.

Мета дослідження. З’ясування особливостей поведінки ідеального ТА типу “змішування–змішування” у стаціонарному режимі та при гармонічних коливаннях температур ТН на входах апарата; розрахунок його АЧХ.

Методика реалізації. Використано відому математичну модель у вигляді системи лінійних диференційних рівнянь, зведених до безрозмірної форми, для розрахунку впливу гармонічних коливань температур ТН на стаціонарність режиму роботи системи “ТА + теплопередача”.

Результати дослідження. Показано, що ефективність стаціонарного режиму роботи ідеального ТА типу “змішування–змішування” можна оцінювати за показником ефективності $\kappa_{0T} = (A_1 + A_2)/(1 + A_1 + A_2) \le 1$, де $A_i = kF/(v_{0i} c_{0i})$ – числа перенесення (k – коефіцієнт теплопередачі через поверхню площею F; v_{0i}, c_{0i} – об’ємні швидкості потоків ТН та їх теплоємності). При $A_i \ll 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \ll 1$, при $A_i \gg 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \approx 1$ (процес теплопередачі значно інтенсивніший порівняно з процесом виведення тепла потоками з ТА). Розраховано АЧХ $\zeta_{T(i)}(\varpi)$ системи, де $\zeta_{T(i)} = \mathrm{E}_i/\mathrm{E}$ – симплекс амплітуд коливань температур на входах та виходах; $\varpi = \omega\tau_{02}$ – комплекс частоти (ω – циклічна частота, τ_{02} – середній час перебування холодного ТН у ТА).

Висновки. При синфазному коливанні температур на входах ТА АЧХ не залежать від A_i, тобто вони рівні АЧХ теплообмінника як 2-х проточних апаратів ідеального змішування. У випадку антифазних коливань температур значення $\zeta_{T(i)}(\varpi)$ рівні при формальній перестановці значень A_i: $\zeta_{T2}(A_1, A_2) = \zeta_{T1}(A_1 \to A_2, A_2 \to A_1)$, що є відображенням теплової “рівноправності” ТН. При $A_1 = A_2 \Leftrightarrow v_{01}c_{01} = v_{02}c_{02}$, $\zeta_{T1}(\varpi) = \zeta_{T2}(\varpi)$; при $A_1 < A_2, \zeta_{T1}(\varpi) > \zeta_{T2}(\varpi)$; при $A_1 > A_2, \zeta_{T1}(\varpi) < \zeta_{T2}(\varpi)$. У випадку $A_i \gg 1 \Rightarrow \Rightarrow \zeta_{T(i)}(\varpi) \ll 1$ (інтенсивна теплопередача зменшує амплітуди коливань температур на виходах ТА). За відносно високих частот стаціонарність режиму практично не порушується за будь-яких значень A_i: $\varpi = \omega\tau_{02} \ge {\sim}10 \Rightarrow \zeta_{T(i)} \ll 1$. Отже, для забезпечення практично стаціонарного режиму роботи ТА необхідно позбутись низьких $(\omega\tau_{02} \le {\sim}10)$ гармонік можливих коливань температур на входах.

Ключові слова: математичне моделювання; теплообмінний апарат типу “змішування–змішування”; показник ефективності роботи; гармонічне коливання температури; амплітудно-частотна характеристика.

Вступ

Математичне моделювання неперервних теплообмінних процесів у нестаціонарних умовах унаслідок дії різних дестабілізуючих факторів – актуальна проблема. При цьому аналітичні розв’язки мають безперечні плюси над числовими, оскільки дають змогу з’ясувати природу причинно-наслідкових зв’язків у досліджуваних властивостях об’єкта моделювання і – як практичний результат – дати фізично аргументовані рекомендації щодо підвищення ефективності його функціонування [1–12].

Для теплообмінних процесів у системах “рідина (газ) + рідина (газ)” основними причинами нестаціонарності є коливання, зокрема випадкові, швидкості потоків теплоносіїв (ТН), їх температур на входах теплообмінного апарата (ТА), утворення накипу на стінках тощо. Це може, відповідно, знизити продуктивність апарата по цільовому ТН, призвести до небажаної зміни його температури на виході ТА, зниження

* corresponding author: re-naissance@ukr.net

ефективності роботи. Тому врахування впливу таких дестабілізуючих факторів на стаціонарність режиму роботи ТА — актуальна задача.

Математичною основою для розрахунку ТА неперервної дії слугують три ідеальні моделі залежно від типу режимів в об'ємах ТА: "змішування—змішування", "змішування—витиснення", "витиснення—витиснення" [2]. Незважаючи на істотні спрощення, вони дають можливість розкрити основні закономірності перебігу процесу.

Ця робота є продовженням [13—16], де досліджено стаціонарні процеси в ТА типу "труба в трубі" (режим "витиснення—витиснення"), розраховано показники ефективності роботи ТА для випадків прямо- та протитечії ТН [13—15]. У роботі [16] уведено показник ефективності ТА типу "змішування—змішування", трактованого як перетворювач сигналу температури.

Постановка задачі

Мета роботи — з'ясування особливостей поведінки ідеального ТА типу "змішування—змішування" у стаціонарному режимі та при гармонічному коливанні температури ТН на входах апарата; розрахунок його амплітудно-частотних характеристик.

Математична модель теплообмінного апарата у режимі "змішування—змішування"

Апарат працює як чотириполюсник (2 апарати ідеального змішування з однаковою температурою та густиною в об'ємі кожного ТН) при неперервній подачі та виведенні ТН із зони теплообміну. Теплова взаємодія між ТН в апаратах відбувається через тверду стінку площею F, яка їх розділяє (рис. 1). При цільовому нагріванні холодного ТН звичайно утворюють цикл гарячого ТН, при охолодженні гарячого — цикл холодного.

Модель — система звичайних лінійних диференціальних рівнянь, що відображає енергетичний баланс у ТА [2]:

$$\begin{cases} V_1 c_1 \dfrac{dT_1}{d\tau} = v_1 c_1 (T_1^{\text{вх}} - T_1) - K_F (T_1 - T_2), \\ V_2 c_2 \dfrac{dT_2}{d\tau} = v_2 c_2 (T_2^{\text{вх}} - T_2) + K_F (T_1 - T_2), \end{cases} \quad (1)$$

де $T_i^{\text{вх}}$ — температури на входах, K; $T_i \equiv T_i^{\text{вих}}$ — відповідні температури ТН на виходах, рівні температурам в об'ємах ТА (режим ідеального змішування), K; V_i — об'єми ТН в апараті, м^3; v_i — об'ємні швидкості потоків, м^3/с; c_i — питомі об'ємні теплоємності ТН, Дж/(м$^3\cdot$K); $v_i c_i \equiv W_i$ — водяні еквіваленти, Вт/K; $K_F = kF$ — коефіцієнт теплопередачі k, віднесений до всієї площі F поверхні теплообміну, Вт/K; τ — час, с.

Індекси тут і нижче позначають: $i = 1, 2$ — гарячий та холодний ТН відповідно; 0 — стаціонарне (номінальне) значення: $dT_i / d\tau \equiv 0$. Δ — символ різниці величин. Пряма риска вгорі — відносне значення.

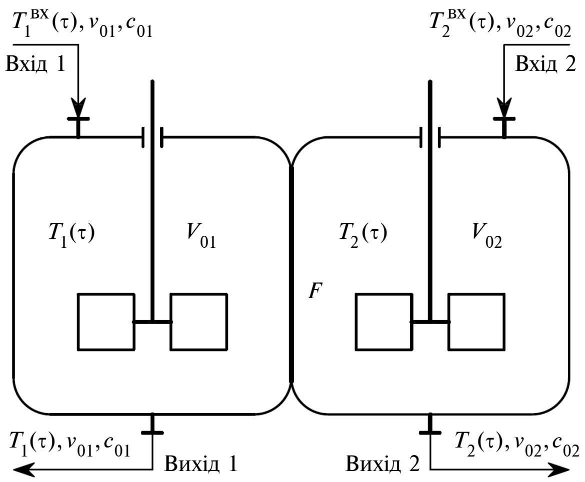

Рис. 1. Структурна схема для розрахунку впливу дестабілізуючого фактора зміни температури на режим роботи ідеального теплообмінного апарата типу "змішування—змішування"

Видно, що розв'язок системи рівнянь (1) залежить від значень температур $T_i^{\text{вх}}$ на входах і параметрів v_i, c_i, K_F, V_i, кожен із яких може бути змінною величиною, тобто дестабілізуючим фактором.

Дослідимо вплив зміни температур, зокрема гармонічної, на входах на стаціонарність режиму роботи ТА за всіх інших сталих параметрів.

Помноживши обидва рівняння на $\tau_{02}/(\tau_{02} T_{02}^{\text{вх}})$, отримаємо в безрозмірних величинах модель із 3-ма параметрами:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{01} \dfrac{d\theta_1}{d\bar{\tau}} + (1 + A_1)\theta_1 - A_1 \theta_2 = \theta_1^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \\ \dfrac{d\theta_2}{d\bar{\tau}} + (1 + A_2)\theta_2 - A_2 \theta_1 = \theta_2^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \end{cases} \quad (2)$$

де $\theta_i^{\text{вх}} = T_i^{\text{вх}}/T_{02}^{\text{вх}}$, $\theta_i \equiv \theta_i^{\text{вих}} = T_i/T_{02}^{\text{вх}}$ — температури на входах та виходах апарата в одиницях номінальної температури холодного ТН на вході; $A_i \equiv A_{0i} = K_F/W_i$ $(\Rightarrow A_1W_1 = A_2W_2)$ — безрозмірне число перенесення, яке рівне за фізичним змістом співвідношенню величин (Вт/К) теплової потужності, віднесеної до різниці температур в один градус, за рахунок теплопередачі та відповідної теплової потужності потоку (при $A_i >> 1$ "переважатиме" теплопередача, при $A_i << 1$ — тепло потоку); $\overline{\tau}_{0i} = \tau_{0i}/\tau_{02} \equiv (V_{0i}/v_{0i})/(V_{02}/v_{02})$ — середній час перебування i-го ТН в одиницях часу перебування холодного ТН у зоні теплообміну, отже, $\overline{\tau}_{02} \equiv 1$; $\overline{\tau} = \tau/\tau_{02}$ — безрозмірний час.

Стаціонарний режим теплообмінного апарата. Оцінка ефективності роботи

Для стаціонарного режиму $d\theta_i/d\overline{\tau} \equiv 0$ і система (2) стає алгебричною:

$$\begin{cases}(1 + A_1)\theta_{01} - A_1\theta_{02} = \theta_{01}^{\text{вх}},\\ (1 + A_2)\theta_{02} - A_2\theta_{01} = 1,\end{cases} \tag{3}$$

де $\theta_{01}^{\text{вх}} \ge 1$, $\theta_{02}^{\text{вх}} \equiv 1$.

Розв'язок (3) має вигляд

$$\theta_{01} = \frac{A_1 + (1 + A_2)\theta_{01}^{\text{вх}}}{1 + A_1 + A_2},\ \theta_{02} = \frac{1 + A_1 + A_2\theta_{01}^{\text{вх}}}{1 + A_1 + A_2}, \tag{4}$$

тобто величини температур θ_{0i} на виходах ТА є лінійними функціями $\theta_{01}^{\text{вх}}$.

Звідси $\theta_{0i}(\theta_{01}^{\text{вх}} = 1) = 1$, що очевидно: теплообмін відсутній унаслідок рівності температур ТН. При $A_i = 0 \Leftrightarrow kF = 0$, $\theta_{01} = \theta_{01}^{\text{вх}}$, $\theta_{02} = \theta_{02}^{\text{вх}} \equiv 1$, тобто температури ТН не змінюються також унаслідок відсутності теплообміну (ідеальна теплова ізоляція поверхні F).

Перевіримо справедливість одержаних формул (4) для теоретично крайніх випадків за наявності теплопередачі $(kF \ne 0)$, зокрема,

$$\begin{gathered}A_1 \to 0\ (v_{01} \to \infty) \Rightarrow \theta_{01} = \theta_{01}^{\text{вх}},\ \theta_{02}^{\max} = \frac{1 + A_2\theta_{01}^{\text{вх}}}{1 + A_2},\\ A_2 \to 0\ (v_{02} \to \infty) \Rightarrow \theta_{02} = 1,\ \theta_{01}^{\min} = \frac{A_1 + \theta_{01}^{\text{вх}}}{1 + A_1},\\ A_1 \to \infty\ (v_{01} \to 0) \Rightarrow \theta_{01} = \theta_{02} = 1,\\ A_2 \to \infty\ (v_{02} \to 0) \Rightarrow \theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{01}^{\text{вх}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Видно, що в перших двох випадках нескінченної швидкості потоку гарячого або холодного ТН їх відповідні температури не змінюються. Перший випадок відповідає теоретично ідеальній умові нагрівання холодного ТН, другий — охолодженню гарячого ТН, але за рахунок величезних енергетичних затрат на переміщення відповідно гарячого чи холодного ТН. В останніх випадках (5) за відсутності руху одного з ТН його температура на виході вирівнюється до температури ТН, який рухається. Все це повністю узгоджується з фізичною суттю усталеного процесу теплопередачі в такому ТА.

Покажемо, що систему "ТА + теплопередача" (подібно до системи "хімічний реактор + + реакція" [17]) можна трактувати як перетворювач сигналу температури [16]. Для цього розрахуємо коефіцієнт перетворення як співвідношення ζ_{0T} різниці температур між ТН на виході та відповідної різниці температур на вході. Із (4)

$$\begin{aligned}\zeta_{0T} &= \frac{\Delta\theta_0^{\text{вих}}}{\Delta\theta_0^{\text{вх}}} = \frac{\theta_{01} - \theta_{02}}{\theta_{01}^{\text{вх}} - 1} = \frac{1}{1 + A_1 + A_2} =\\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{K_F}{v_{01}c_{01}} + \dfrac{K_F}{v_{02}c_{02}}} \notin f(\theta_{0i}^{\text{вх}}),\end{aligned} \tag{6}$$

звідки $K_F = 0 \Rightarrow \zeta_{0T} = 1$ — відсутність теплообміну (ідеальна теплоізоляція поверхні), тобто втрата функціонального призначення ТА, отже, значення $\zeta_{0T} = 1$ у звичайному розумінні нелогічне. Подібним чином $v_{0i} \to \infty \Rightarrow \zeta_{0T} \to 1$. Із протилежної сторони $K_F \to \infty$ або $v_{0i} \to 0 \Rightarrow \Rightarrow \zeta_{0T} \to 0$ — ідеальні умови теплопередачі або негативна відсутність руху i-го ТН (нульова продуктивність по ньому), тобто значення $\zeta_{0T} = 0$ у цьому випадку також достатньо алогічне.

Тому введемо, використавши (6), більш зручний показник ефективності κ_{0T} роботи ТА як

$$\begin{gathered}\kappa_{0T} = 1 - \zeta_{0T} = \frac{A_1 + A_2}{1 + A_1 + A_2} \le 1 \Rightarrow\\ \Rightarrow \kappa_{0T\max}^{\text{теор}} \overset{[A_i \to \infty \Leftrightarrow v_{0i} \to 0]}{=} 1,\ \kappa_{0T\min}^{\text{теор}} \overset{[A_i \to 0 \Leftrightarrow v_{0i} \to \infty]}{=} 0,\\ A_1 + A_2 >> 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \approx 1,\\ A_1 + A_2 << 1 \Rightarrow \kappa_{0T} << 1,\end{gathered} \tag{7}$$

де нерівності в (7) відповідають крайнім випадкам реального процесу теплообміну.

Гармонічні збурення температур на входах теплообмінного апарата. Розрахунок амплітудно-частотних характеристик

Нехай ТА працює у стаціонарному режимі і з моменту часу $\bar{\tau}=0$ температури на входах почнуть змінюватися, зокрема за гармонічним законом. Тоді задача Коші має вигляд

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{01}\dfrac{d\theta_1}{d\bar{\tau}}+(1+A_1)\theta_1-A_1\theta_2=\theta_1^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \\ \dfrac{d\theta_2}{d\bar{\tau}}+(1+A_2)\theta_2-A_2\theta_1=\theta_2^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \\ \bar{\tau}=0,\ \theta_1=\theta_{01}>1,\ \theta_2=\theta_{02}<\theta_{01}, \end{cases}$$

де початкова умова відповідає стаціонарному режимові.

При переході до абсолютних відхилень $\Delta\theta_i$ температур від номіналів з урахуванням (3)

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{01}\dfrac{d\Delta\theta_1}{d\bar{\tau}}+(1+A_1)\Delta\theta_1-A_1\Delta\theta_2=\Delta\theta_1^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \\ \dfrac{d\Delta\theta_2}{d\bar{\tau}}+(1+A_2)\Delta\theta_2-A_2\Delta\theta_1=\Delta\theta_2^{\text{вх}}(\bar{\tau}), \\ \bar{\tau}=0, \Delta\theta_i=0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\Delta\theta_i^{\text{вх}}=\theta_i^{\text{вх}}-\theta_{0i}^{\text{вх}}$, $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{0i}$ [відповідні відносні відхилення миттєвих значень температур від номіналів $\varepsilon_i^{\text{вх}}=\Delta\theta_i^{\text{вх}}/\theta_{0i}^{\text{вх}}\equiv(\theta_i^{\text{вх}}/\theta_{0i}^{\text{вх}})-1$, $\varepsilon_i=(\theta_i/\theta_{0i})-1$].

Обмежимось спрощеним випадком рівності $\bar{\tau}_{01}=\bar{\tau}_{02}=1$ середніх часів перебування ТН і рівності $\Delta\theta_{i\max}^{\text{вх}}=\mathrm{E}_1^{\text{вх}}=\mathrm{E}_2^{\text{вх}}\equiv\mathrm{E}$ амплітуд гармонічних коливань температури. Тоді (8) набуде вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta\theta_1}{d\bar{\tau}}+(1+A_1)\Delta\theta_1-A_1\Delta\theta_2=\mathrm{E}\sin\bar{\omega}\bar{\tau}, \\ \dfrac{d\Delta\theta_2}{d\bar{\tau}}+(1+A_2)\Delta\theta_2-A_2\Delta\theta_1=\pm\mathrm{E}\sin\bar{\omega}\bar{\tau}, \\ \bar{\tau}=0,\ \Delta\theta_i=0, \end{cases} \tag{9}$$

де $\bar{\omega}=\omega\tau_{02}$ – безрозмірна циклічна частота; знак "+" відповідає синфазному режиму, а знак "–" – протифазному.

У випадку гармонічного збурення температури на входах ТА розв'язки (9) теж гармонічні [17] (усталений режим: $\bar{\tau}\to\infty$):

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1&=Y_1\cos\bar{\omega}\bar{\tau}+Y_2\sin\bar{\omega}\bar{\tau}, \\ \Delta\theta_2&=Y_3\cos\bar{\omega}\bar{\tau}+Y_4\sin\bar{\omega}\bar{\tau}, \end{aligned} \tag{10}$$

де амплітуди Y_j складових визначаються із системи лінійних рівнянь, отриманих підстановкою (10) у (9):

$$\begin{cases} -\bar{\omega}Y_1+(1+A_1)Y_2-A_1Y_4=\mathrm{E}, \\ (1+A_1)Y_1+\bar{\omega}Y_2-A_1Y_3=0, \\ -A_2Y_2-\bar{\omega}Y_3+(1+A_2)Y_4=\pm\mathrm{E}, \\ -A_2Y_1+(1+A_2)Y_3+\bar{\omega}Y_4=0. \end{cases} \tag{11}$$

Із (11) головний визначник рівний (внизу для порівняння наведений головний визначник для системи "проточний реактор ідеального змішування (ПРІЗ) + реакція $\mathrm{A}_1\leftrightarrow\alpha\mathrm{A}_2$" [17])

$$\begin{aligned} \Delta&=\begin{vmatrix} -\bar{\omega} & 1+A_1 & 0 & -A_1 \\ 1+A_1 & \bar{\omega} & -A_1 & 0 \\ 0 & -A_2 & -\bar{\omega} & 1+A_2 \\ -A_2 & 0 & 1+A_2 & \bar{\omega} \end{vmatrix}= \\ &=(1+\bar{\omega}^2)(S^2+\bar{\omega}^2),\ S=1+A_1+A_2\ [\text{ТА}], \\ \Delta&=\begin{vmatrix} -\bar{\omega} & 1+a_1 & 0 & -a_2 \\ 1+a_1 & \bar{\omega} & -a_2 & 0 \\ 0 & -a_1 & -\bar{\omega} & 1+a_2 \\ -a_1 & 0 & 1+a_2 & \bar{\omega} \end{vmatrix}= \\ &=(1+\bar{\omega}^2)(S^2+\bar{\omega}^2),\ S=1+a_1+a_2\ [\text{ПРІЗ}], \end{aligned} \tag{12}$$

де $S=1+A_1+A_2$ – деяке сумарне число перенесення. За відсутності теплообміну $A_i=0\Leftrightarrow K_F=$ $=0\Rightarrow S_{\text{ТА}}=1$ – число перенесення ТА як апарата.

Як видно з (12), для системи "проточний ТА ідеального змішування + теплопередача" головний визначник за формою та значенням ідентичний визначнику системи "ПРІЗ + реакція $\mathrm{A}_1\leftrightarrow\alpha\mathrm{A}_2$": $S=1+a_1+a_2\Rightarrow S_{\text{ПРІЗ}}=1$ ($a_i=$ $a_i=\partial\bar{w}_{0i}/\partial c_{0i}=n_i\bar{w}_{0i}/c_{0i}$ – статичні чутливості швидкостей $\bar{w}_{0i}$ реакцій порядків n_i до квазістаціонарних змін концентрацій c_{0i} [17]). Отже, в цьому аспекті теплопередачу можна розглядати як деяку "теплову реакцію".

Синфазні коливання температур на входах теплообмінного апарата

Допоміжні визначники дорівнюють

$$\begin{gathered}\Delta_1 = \Delta_3 = -\mathrm{E}\bar{\omega}(S^2 + \bar{\omega}^2),\\ \Delta_2 = \Delta_4 = \mathrm{E}(S^2 + \bar{\omega}^2).\end{gathered} \tag{13}$$

Із (12), (13) за правилом Крамера $Y_j = \Delta_j/\Delta$ і відповідні амплітуди на виході $\mathrm{E}_1 = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} = \sqrt{Y_3^2 + Y_4^2} = \mathrm{E}_2$, а для зсувів фаз $\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \Delta_1/\Delta_2 = \Delta_3/\Delta_4 = \mathrm{tg}\,\varphi_2$. Тоді амплітудно-частотні (АЧХ) та фазочастотні (ФЧХ) характеристики системи мають вигляди, що збігаються з характеристиками ПРІЗ як апарата [17]:

$$\begin{gathered}\zeta_{T(i)} = \frac{\mathrm{E}_i}{\mathrm{E}} = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\omega}^2}} \notin f(A_i),\\ \varphi_i = -\mathrm{arctg}\,\bar{\omega} \notin f(A_i),\end{gathered} \tag{14}$$

де $\zeta_{T(i)} = \mathrm{E}_i/\mathrm{E}$ – симплекс амплітуд коливань температури на виході та вході ТА (системний коефіцієнт перетворення).

Видно, що у випадку синфазних коливань температури ТА типу “змішування–змішування” поводить себе як проточний апарат ідеального змішування: теплопередача не впливає на його частотні характеристики.

При цьому, як слідує з (14), “низькочастотні” ($\bar{\omega} << 1$) коливання температури на входах передаються без змін на виходи ТА, а “високочастотні” ($\bar{\omega} >> 1$) коливання стаціонарності режиму практично не порушують:

$$\begin{gathered}\bar{\omega} \equiv \omega\tau_{02} << 1 \Rightarrow \zeta_i \approx 1,\ |\varphi_i| \approx \bar{\omega} << 1,\\ \bar{\omega} >> 1 \Rightarrow \zeta_i \approx 1/\bar{\omega} << 1,\ \varphi_i \approx -\pi/2.\end{gathered}$$

Отже, за відносно високих частот коливання на виходах відстають за фазою від коливань на вході на $\sim 90°$.

Протифазні коливання температур на входах теплообмінного апарата

У цьому випадку допоміжні визначники дорівнюють

$$\begin{gathered}\Delta_1/\mathrm{E} = -\bar{\omega}[1 + \bar{\omega}^2 + (1 + A_2)^2 - (1 + A_1)^2],\\ \Delta_2/\mathrm{E} = (1 + 2A_1)\bar{\omega}^2 + (1 + A_2)^2 - A_1^2,\\ \Delta_3/\mathrm{E} = \bar{\omega}[1 + \bar{\omega}^2 + (1 + A_1)^2 - (1 + A_2)^2],\\ \Delta_4/\mathrm{E} = -(1 + 2A_2)\bar{\omega}^2 - (1 + A_1)^2 + A_2^2,\end{gathered} \tag{15}$$

звідки і з (12) визначаються АЧХ ($\zeta_{T1}(\bar{\omega}) = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}/\Delta$, $\zeta_{T2}(\bar{\omega}) = \sqrt{\Delta_3^2 + \Delta_4^2}/\Delta$) і ФЧХ ($\mathrm{tg}\varphi_1 = \Delta_1/\Delta_2$, $\mathrm{tg}\varphi_2 = \Delta_3/\Delta_4$) системи.

На рис. 2 зображені АЧХ для різних значень A_i (детальні розрахункові формули не наведені, оскільки вони мають достатньо громіздкий вигляд).

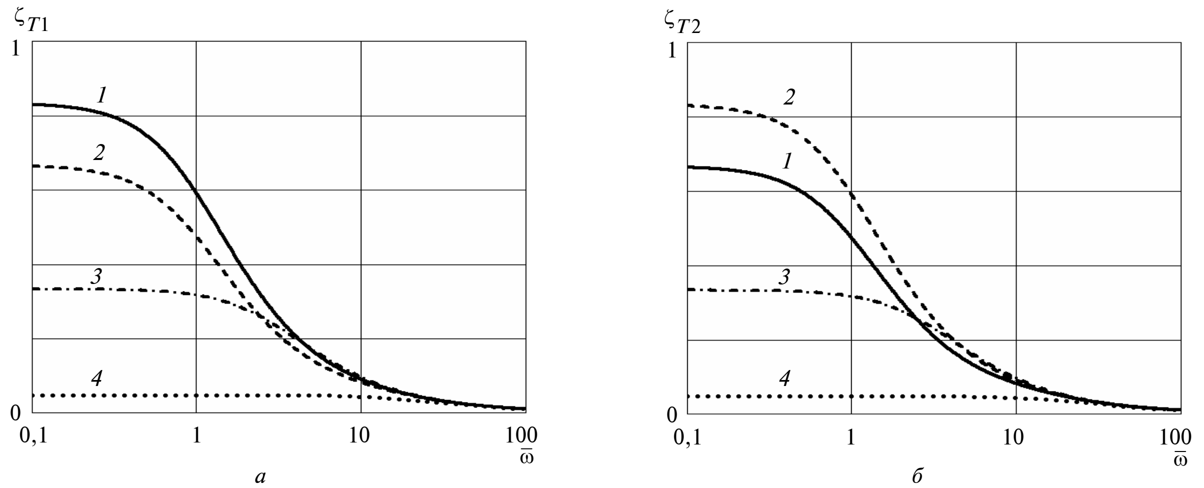

Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ системи “ідеальний теплообмінний апарат типу “змішування–змішування” ($\tau_{01} = \tau_{02}$) + теплопередача” при антифазному гармонічному збуренні температур на вході: *1* – $A_1 = 1,\ A_2 = 10$; *2* – $A_1 = 10,\ A_2 = 1$; *3* – $A_1 = A_2 = 1$; *4* – $A_1 = A_2 = 10$

Як видно з рис. 2, значення $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ рівні при перестановці значень A_i: $\zeta_{T2}(A_1, A_2) = \zeta_{T1}(A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1)$, що є відображенням теплової "рівноправності" ТН. Зокрема, при $A_1 = A_2 \Leftrightarrow v_{01}c_{01} = v_{02}c_{02}$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) = \zeta_{T2}(\bar{\omega})$. При $A_1 < A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) > \zeta_{T2}(\bar{\omega})$, при $A_1 > A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) < \zeta_{T2}(\bar{\omega})$.

Для достатньо великих значень чисел перенесення $A_i >> 1 \Rightarrow \zeta_{T(i)} << 1$ і їх значення фактично не залежать від частоти. Це можна пояснити значним превалюванням теплопередачі над теплотою потоків $(kF >> v_{0i}c_{0i})$, що нівелює коливання температур ТН на входах ТА.

За порівняно високих частот стаціонарність режиму практично не порушується за будь-яких значень A_i: $\bar{\omega} = \omega\tau_{02} \geq \sim 10 \Rightarrow \zeta_{T(i)} << 1$.

Висновки

Показано, що ефективність стаціонарного режиму роботи ідеального ТА типу "змішування–змішування" можна оцінювати за показником ефективності $\kappa_{0T} = (A_1 + A_2)/(1 + A_1 + A_2) \leq 1$, де $A_i = kF/(v_{0i}c_{0i})$ – числа перенесення. При $A_i << 1 \Rightarrow \kappa_{0T} << 1$; при $A_i >> 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \approx 1$ (процес теплопередачі значно інтенсивніший порівняно з процесом виведення тепла потоками із ТА).

Розраховано АЧХ $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ системи "ТА + + теплопередача". При синфазному коливанні температур на входах ТА АЧХ не залежать від A_i, тобто вони рівні АЧХ теплообмінника як 2-х проточних апаратів ідеального змішування. У випадку антифазних коливань температур значення $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ рівні при формальній перестановці значень A_i: $\zeta_{T2}(A_1, A_2) = \zeta_{T1}(A_1 \to A_2,$ $A_2 \to A_1)$, що є відображенням теплової "рівноправності" ТН. Зокрема, при $A_1 = A_2 \Leftrightarrow v_{01}c_{01} = v_{02}c_{02}$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) = \zeta_{T2}(\bar{\omega})$; при $A_1 < A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) > \zeta_{T2}(\bar{\omega})$; при $A_1 > A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) < \zeta_{T2}(\bar{\omega})$. У випадку $A_i >> 1 \Rightarrow \zeta_{T(i)}(\bar{\omega}) << 1$ (інтенсивна теплопередача фактично нівелює коливання температур на входах).

За відносно високих частот стаціонарність режиму практично не порушується за будь-яких значень A_i: $\bar{\omega} = \omega\tau_{02} \geq 10 \Rightarrow \zeta_{T(i)} << 1$ (ω – циклічна частота, τ_{02} – середній час перебування холодного ТН у ТА).

У подальшому можливий розрахунок ФЧХ $\varphi_i(\bar{\omega})$ системи, але це зв'язано з труднощами, обумовленими зміною знаків визначників Δ_j за певних значень частоти $\bar{\omega}_{\bullet}$ (див. (15)). Це призводить до різкої зміни знаків φ_i чи характеру зміни $\varphi_i(\bar{\omega})$ у точці $\bar{\omega}_{\bullet}$, що важко пояснити.

References

[1] W.M. Kays and A.L. London, *Compact Heat Exchangers*. Florida, Malabar: Krieger Publishing Company, 1998.

[2] A.G. Bondar, *Mathematical Modeling in Chemical Technology*. Kyiv, Ukraine: Vyshcha Shkola, 1973.

[3] H. Hausen, *Heat Transfer in Countercurrent, Concurrent and Crosscurrent Flow*. Heidelberg, Germany: Springer Verlag, 1976.

[4] W.L. Luyben, *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1996.

[5] J.M. Coulson and J.F. Richardson, *Chemical Engineering*, vol. 1, *Fluid Flow, Heat Transfer and Mass Transfer*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999.

[6] A.D. Polyanin *et al.*, *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London: Gordon and Breach Sci. Publ., 2002.

[7] C. Boyadjiev, *Theoretical Chemical Engineering. Modeling and Simulation*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2010.

[8] A.K Jana, *Chemical Process Modelling and Computer Simulation*. Delhi: PHI Learning Private Limited, 2011.

[9] A. Rasmuson *et al.*, *Mathematical Modeling in Chemical Engineering*. Cambridge: United Kingdom by MPG Print-group Ltd, 2014.

[10] R. Serthn and T. Lestina, *Process Heat Transfer. Principles and Applications*. Cambridge, UK: Academic Press, Elsevier, 2014.

[11] J.R. Welty *et al.*, *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer*. New York: John Wiley & Sons Inc., 2014.

[12] J.-P. Duroudier, *Heat Transfer in the Chemical, Food and Pharmaceutical Industries*. London, UK: ISTE Press, 2016.

[13] I.D. Lucheyko and R.V. Kotsiurko, "Concurrent and countercurrent flow mode comparison in the tube in tube heat exchanger", *Naukovyi Ogliad*, vol. 28, no. 7, pp. 15–26, 2016.

[14] I.D. Lucheyko and R.V. Kotsiurko, “Efficiency coefficient of the “tube in tube” heat exchanger in the concurrent flow”, in *Proc. XX Mendeleev Congress on General and Applied Chemistry*, vol. 3, Yekaterinburg, Russia, 2016.

[15] I.D. Lucheyko and R.V. Kotsiurko, “Temperature efficiency coefficient of the “tube in tube” heat exchanger in the counter-current flow”, in *Proc. XVI Int. Sci. Conf. “High-Tech in Chemical Engineering–2016”*, Moscow, Russia, 2016.

[16] R.V. Kotsiurko and I.D. Lucheyko, “Mixing-mixing” heat exchanger as temperature signal transducer”, in *Proc. VI Int. Sci. Tech. Conf. “Current Issues in Modern Technologies”*, Ternopil, Ukraine, 2017.

[17] I.D. Lucheyko *et al.*, “Frequency characteristics of a continuous stirred tank reactor at small perturbations of the concentration of a reagent (reaction $\mathrm{A}_1 \rightleftarrows \alpha\mathrm{A}_2$)”, *Visnyk TDTU im. I. Puliuja*, vol. 11, no. 3, pp. 195–204, 2006.

И.Д. Лучейко, Р.В. Коцюрко

АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ “ТЕПЛООБМЕННИК ТИПА “СМЕШЕНИЕ–СМЕШЕНИЕ” + + ТЕПЛОПЕРЕДАЧА”

Проблематика. Математическое моделирование непрерывных технологических процессов в нестационарных условиях, вызванных действиями различных дестабилизирующих факторов, – актуальная проблема. При этом аналитические решения имеют существенные преимущества перед численными, так как позволяют выяснить природу причинно-следственных связей в рассматриваемых свойствах объекта моделирования и – как практический результат – дать физически обоснованные рекомендации по повышению эффективности его функционирования. Для теплообменных процессов причиной нестационарности, в частности, являются возможные колебания температур теплоносителей (ТН) на входах проточного теплообменного аппарата (ТА). Это приводит, как правило, к снижению эффективности работы ТА. Поэтому расчет его амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) имеет немаловажное значение.

Цель исследования. Выяснение особенностей поведения идеального ТА типа “смешение–смешение” в стационарном режиме и при гармонических колебаниях температур ТН на входах аппарата; расчет его АЧХ.

Методика реализации. Использована известная математическая модель в виде системы линейных дифференциальных уравнений (приведенных к безразмерной форме) для расчета влияния гармонических колебаний температур ТН на стационарность режима работы системы “ТА + теплопередача”.

Результаты исследования. Показано, что эффективность стационарного режима работы идеального ТА типа “смешение–смешение” можно оценивать по показателю эффективности $\kappa_{0T} = (A_1 + A_2)/(1 + A_1 + A_2) \le 1$, где $A_i = kF/(v_{0i} c_{0i})$ – числа переноса (k – коэффициент теплопередачи через поверхность площадью F; v_{0i}, c_{0i} – объемные скорости потоков ТН и их теплоемкости). При $A_i << 1 \Rightarrow \kappa_{0T} << 1$, при $A_i >> 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \approx 1$ (процесс теплопередачи значительно интенсивнее по сравнению с процессом вывода тепла потоками из ТА). Рассчитана АЧХ $\zeta_{T(i)}(\overline{\omega})$ системы, где $\zeta_{T(i)} = \mathrm{E}_i/\mathrm{E}$ – симплекс амплитуд колебаний температур на входах и выходах; $\overline{\omega} = \omega\tau_{02}$ – комплекс частоты (ω – циклическая частота, τ_{02} – среднее время пребывания холодного ТН в ТА).

Выводы. При синфазном колебании температур на входах ТА АЧХ не зависят от A_i, т.е. они равны АЧХ теплообменника как 2-х проточных аппаратов идеального смешения. В случае антифазных колебаний температур значения $\zeta_{T(i)}(\overline{\omega})$ равны при формальной перестановке значений A_i: $\zeta_{T2}(A_1, A_2) = \zeta_{T1}(A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1)$, что является отражением теплового “равноправия” ТН. При $A_1 = A_2 \Leftrightarrow v_{01}c_{01} = v_{02}c_{02}$, $\zeta_{T1}(\overline{\omega}) = \zeta_{T2}(\overline{\omega})$; при $A_1 < A_2$, $\zeta_{T1}(\overline{\omega}) > \zeta_{T2}(\overline{\omega})$; при $A_1 > A_2$, $\zeta_{T1}(\overline{\omega}) < \zeta_{T2}(\overline{\omega})$. В случае $A_i >> 1 \Rightarrow$ $\zeta_{T(i)}(\overline{\omega}) << 1$ (интенсивная теплопередача уменьшает амплитуды колебаний температур на выходах ТА). При относительно высоких частотах стационарность режима практически не нарушается при любых значениях A_i: $\overline{\omega} = \omega\tau_{02} \ge \sim 10 \Rightarrow \zeta_{T(i)} << 1$. Следовательно, для обеспечения практически стационарного режима работы ТА необходимо избавиться от низких $(\omega\tau_{02} \le \sim 10)$ гармоник возможных колебаний температур на входах.

Ключевые слова: математическое моделирование; теплообменный аппарат типа “смешение–смешение”; показатель эффективности работы; гармоническое колебание температуры; амплитудно-частотная характеристика.

I.D. Lucheyko, R.V. Kotsiurko

AMPLITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTICS OF THE SYSTEM “MIXING–MIXING” HEAT EXCHANGER + HEAT TRANSFER”

Background. Mathematical modeling of continuous technological processes in non-stationary conditions caused by actions of various destabilizing factors is an actual problem. At the same time, analytical solutions have significant advantages over numerical ones, since they allow us to find out the nature of causation links in the analyzed properties of the modeling object and, as a practical result, to give physically well-founded recommendations for improving the efficiency of its functioning.The possible fluctuations in the temperature of heat carrier (HC) at the inputs of the flow heat exchanger (HE) cause instabilities for heat exchange processes. This usually leads to the efficiency decrease of the HE. Therefore, the calculation of its amplitude-frequency characteristics (AFC) has a significant (weighty) value.

Objective. The aim of the paper is to find out the behavior of the ideal “mixing–mixing” HE in stationary mode and harmonic fluctuations of temperature at the inputs of the apparatus and calculation of its AFC.

Methods. Known mathematical model in the form of a system of linear differential equations (reduced summed to dimensionless form) to calculate the effect of harmonic fluctuations of temperature on the stationary mode of the system "HE + heat transfer" was used.

Results. It is shown that the efficiency of the stationary mode of operation of the ideal "mixing – mixing" HE can be estimated by the efficiency indicator $\kappa_{0T} = (A_1 + A_2)/(1 + A_1 + A_2) \le 1$, where $A_i = kF/(v_{0i} c_{0i})$ – transfer number (k – heat transfer coefficient across the surface area F; v_{0i}, c_{0i} – the volumetric flow rates of HC and their heat capacities). When $A_i << 1 \Rightarrow \kappa_{0T} << 1$, when $A_i >> 1 \Rightarrow \kappa_{0T} \approx 1$ (the process of heat transfer is much more intense compared with the process of heat outlet by flows from HE). AFC $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ of the system is calculated, where $\zeta_{T(i)} = \mathrm{E}_i/\mathrm{E}$ – the simplex of the amplitudes of temperature fluctuations at the inputs and outputs; $\bar{\omega} = \omega\tau_{02}$ – frequency complex (ω – cyclic frequency, τ_{02} – average time of stay of cold HC in HE).

Conclusions. In the case of common-phase fluctuations of temperatures at the inputs of HE AFC don't depend on A_i, i.e. they are equal to the AFC of HE as two flow devices of the ideal mixing. In the case of antiphase fluctuations of temperature the values $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega})$ are equal when the formal rearrangement of values A_i: $\zeta_{T2}(A_1, A_2) = \zeta_{T1}(A_1 \to A_2,\ A_2 \to A_1)$, which is a reflection of the thermal "equality" of HC. When $A_1 = A_2 \Leftrightarrow v_{01}c_{01} = v_{02}c_{02}$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) = \zeta_{T2}(\bar{\omega})$; when $A_1 < A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) > \zeta_{T2}(\bar{\omega})$; at $A_1 > A_2$, $\zeta_{T1}(\bar{\omega}) < \zeta_{T2}(\bar{\omega})$. In the case $A_i >> 1 \Rightarrow$ $\zeta_{T(i)}(\bar{\omega}) << 1$ (the intense heat transfer reduces the amplitudes of temperature fluctuations at the outputs of the HC). At relatively high frequencies, stationary mode is practically not violated at any values of A_i: $\bar{\omega} = \omega\tau_{02} \ge \sim 10 \Rightarrow \zeta_{T(i)} << 1$. Therefore, in order to ensure practically stationary mode of HE operation, it is necessary to get rid of low $(\omega\tau_{02} \le \sim 10)$ harmonics of possible temperature fluctuations at the inputs.

Keywords: mathematical modeling; "mixing–mixing" heat exchanger; performance indicator; harmonic temperature fluctuations; amplitude-frequency characteristic.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
30 травня 2018 року

Прийнята до публікації
6 вересня 2018 року