

DOI: 10.20535/1810-0546.2018.2.122888

УДК 681.2:537.7

Г.С. Тимчик, І.О. Яковенко*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ТРАНСФОРМАЦІЯ ДИФРАКЦІЙНОГО СПЕКТРА ПРИ КУТОВИХ НАХИЛАХ ОБ'ЄКТА

Проблематика. В сучасних інформаційно-вимірювальних системах для дослідження та обробки просторових сигналів різноманітної фізичної природи широке застосування має фур'є-оптика, що актуалізує проблеми, пов'язані з формуванням дифракційних спектрів когерентними оптичними системами. Перетворенням просторово-частотних координат фур'є-спектра нормально освітленого транспаранта можна отримати розв'язок задачі дослідження дифракції світла на транспаранті, що має нахил до вісі оптичної системи.

Мета дослідження. За допомогою перетворення координат у просторово-частотній області, що виражається через елементи матриці повороту транспаранта, встановити зв'язок дифракційного фур'є-спектра транспаранта, який має нахил до оптичної вісі, з фур'є-спектром нормально освітленого транспаранта.

Методика реалізації. Методика базується на основі перетворення фур'є-спектра нормально освітленого транспаранта (модельованого як хвилею, що проходить, так і хвилею, що відбивається) при його довільних кутів нахилах у просторі та в різноманітних часткових випадках виродження двовимірного спектра.

Результати дослідження. Отримані результати і обґрунтовані практичні рекомендації можуть бути використані для реалізації практичних задач із використанням когерентних оптичних спектроаналізаторів.

Висновки. Відомі фундаментальні дослідження дифракції світла на транспаранті, що має нахил до вісі оптичної системи, дають розв'язок цієї задачі через перетворення просторово-частотних координат фур'є-спектра нормально освітленого транспаранта. Цей результат узагальнено за допомогою теореми Ван-Ціттерта–Церніке на випадок частково-когерентного освітлення. Проте у цих дослідженнях розглянуто лише частковий випадок нахилу плоского транспаранта відносно лише однієї з координатних осей, а в практичних застосуваннях мають місце двокоординатні нахили і поздовжні зсуви, що наразі не досліджено. Оптична система, яка реалізує фур'є-перетворення функції пропускання (відбиття) транспаранта, що має нахил до оптичної вісі, є частотно-неінваріантною, оскільки при лінійному зсуві просторових частот на вході спостерігаються нелінійний зсув і спотворення форми імпульсного відгуку, які є наслідком нахилу транспаранта і виражаються через елементи матриці повороту.

Ключові слова: фур'є-спектр; матриця повороту транспаранта; фур'є-перетворення; кутівий нахил; когерентна оптична система.

Вступ

Широке застосування фур'є-оптики в сучасних інформаційно-вимірювальних системах для досліджень та обробки просторових сигналів різноманітної фізичної природи [1–5] актуалізує проблеми, пов'язані з формуванням дифракційних спектрів когерентними оптичними системами. Інтерес становить дослідження дифракції світла на транспаранті, що має нахил до вісі оптичної системи [1]. В [1, 3, 4] розв'язок цієї задачі отримано через перетворення просторово-частотних координат фур'є-спектра нормально освітленого транспаранта. Цей результат узагальнено за допомогою теореми Ван-Ціттерта–Церніке на випадок частково когерентного освітлення [1, 6, 7].

Постановка задачі

У вказаних працях розглянуто лише частковий випадок нахилу плоского транспаранта

відносно лише однієї з координатних осей. У практичних застосуваннях мають місце двокоординатні нахили і поздовжні зсуви, що наразі не досліджено. Тому метою цієї роботи є визначення функціональних трансформацій дифракційного спектра при двокоординатних нахилах і повздовжніх зсувах по оптичній осі системи носія просторового запису вхідного сигналу.

Обґрунтування дифракційної задачі

Нами отримано загальний вигляд перетворення фур'є-спектра нормально освітленого транспаранта (модельованого як хвилею, що проходить, так і хвилею, що відбивається) при його довільних кутів нахилах у просторі та розглянуто різноманітні часткові випадки виродження двовимірного спектра.

Нехай плоский транспарант із коефіцієнтом пропускання $\tau(\vec{r}_0)$ має нормаль \vec{n} до пло-

*corresponding author: yakovenkoap@gmail.com

щини і збігається з ортом \bar{z}_0 системи координат $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$. Введемо додаткову систему координат $(0, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, орт \bar{z}_i якої задає напрямок поширення скалярної хвилі \bar{U}_i , що падає на вихідний транспарант (рис. 1 і 2). Введена вказаним способом система координат $(0, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ зв'язана з $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ матрицею повороту $\|i\|$. Для геометрії, вказаної на рис. 1 і 2, матриця повороту дорівнює

$$\|i\| = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Запишемо рівняння для хвилі, що падає \bar{U}_i на поверхню вхідного транспаранта у вигляді спектра плоских хвиль [1]:

$$U_i(\bar{r}_i) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_i(\bar{\chi}_i) \exp(j\bar{\chi}_i \bar{r}_i) d\chi_{ix} d\chi_{iy}, \quad (2)$$

де \bar{r}_i – радіус-вектор і $\bar{\chi}_i$ – хвильовий вектор, що існують у $(0, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.

Вираз (2) у координатах $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ має вигляд

$$U_i(\bar{r}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_i(\bar{\chi}_i) \exp(j\bar{k}_i \bar{r}_0) d\chi_{ix} d\chi_{iy}, \quad (3)$$

де $\bar{r}_0 = \|i\|^{-1} \bar{r}_i$, $\bar{k}_i = \|i\|^{-1} \bar{\chi}_i$ – обернена мат-

риця $\|i\|^{-1}$, яка в силу ортогональності збігається з транспонованою.

Обмежимося для початку випадком, коли U_i – плоска хвиля з одиничною амплітудою, рівномірно розподіленою на поверхні фронту хвилі:

$$U_i(\bar{r}_0) = \exp(j\bar{k}_i \bar{r}_0).$$

Просторовий розподіл амплітуд поля хвилі U_i у довільній точці \bar{r}_1 простору за транспарантом, відповідно до відомої теореми Гріна [1], дорівнює

$$U_i(\bar{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \left(U_0(\bar{r}_0) \frac{\partial G(\bar{r}_0, \bar{r}_1)}{\partial n_0} - G(\bar{r}_0, \bar{r}_1) \frac{\partial U_0(\bar{r}_0)}{\partial n_0} \right) dx_0 dy_0, \quad (4)$$

де

$$U_0(\bar{r}_0) = \tau(\bar{r}_0) U_i(\bar{r}_0) \Big|_{z_0=0} \quad (5)$$

є розподілом амплітуд поля в площині $z_0 = 0$ безпосередньо за транспарантом;

$$G(\bar{r}_0, \bar{r}_1) = \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\exp[j\bar{k}_i(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)]}{\sqrt{k^2 - k_{ix}^2 - k_{iy}^2}} dk_{ix} dk_{iy} \quad (6)$$

є функцією Гріна вільного однорідного простору, що записана у вигляді спектра плоских хвиль.

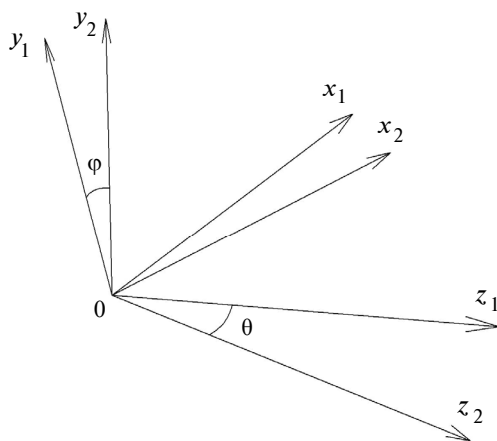


Рис. 1. Взаємне розміщення систем координат для транспаранта, що працює на відбиття

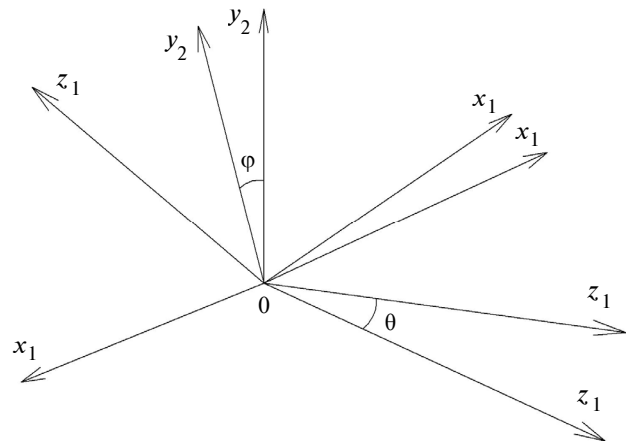


Рис. 2. Взаємне розміщення систем координат для транспаранта, що працює на пропускання

Після обчислення нормальних похідних $\frac{\partial U_0(\bar{r}_0)}{\partial n_0}$ та $\frac{\partial G(\bar{r}_0, \bar{r}_1)}{\partial n_0}$ і з урахуванням $\bar{n}_0 = \bar{z}_0$

отримаємо

$$\frac{\partial U_0(\bar{r}_0)}{\partial n_0} = j\sqrt{k^2 - k_{ix}^2 - k_{iy}^2} \cdot U_0(\bar{r}_0), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\bar{r}_0, \bar{r}_1)}{\partial n_0} = \\ = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \exp[j\bar{k}_t(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)] dk_{tx} dk_{ty} \end{aligned} \quad (8)$$

і після підстановки виразів (5)–(8) у (4) одержимо

$$\begin{aligned} U_t(\bar{r}_1) = \frac{1}{8\pi^2} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\bar{r}_0) \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) \exp[j(\bar{k}_t \bar{r}_1 - \\ - \bar{k}_d \bar{r}_0)] dx_0 dy_0 dk_{tx} dk_{ty}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\bar{k}_d = \bar{k}_t - \bar{k}_i(\bar{r}_0)$, $k_{iz} = \sqrt{k^2 - k_{ix}^2 - k_{iy}^2}$, $k_{tz} = \sqrt{k^2 - k_{tx}^2 - k_{ty}^2}$.

Після виконання інтегрування (9) та перепису \bar{r}_1 у системі координат $(0, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ отримаємо

$$\begin{aligned} U_t(\bar{r}_t) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int |J_t| \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) \times \\ \times T(\bar{k}_d) \exp(j\bar{\chi}_t \bar{r}_t) d\chi_{tx} d\chi_{ty}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$T(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\bar{r}_0) \exp(-j(\bar{\chi}_0 \bar{r}_0) dx_0 dy_0 \quad (11)$$

є фур'є-образом функції $\tau(\bar{r}_0)$ пропускання вхідного транспаранта;

$$J_t = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial k_{tx}}{\partial \chi_{tx}} & \frac{\partial k_{ty}}{\partial \chi_{tx}} \\ \frac{\partial k_{tx}}{\partial \chi_{ty}} & \frac{\partial k_{ty}}{\partial \chi_{ty}} \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_t = \|i\| \bar{r}_1, \quad \bar{\chi}_t = \|i\| \bar{k}_t.$$

З (10) можна зробити висновок, що фур'є-спектр дифрагованої хвилі може бути описаний виразом

$$U_t(\bar{\chi}_t) = \frac{|J_t|}{2} \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) \exp(j\chi_{tz} z_t) T(\bar{k}_d) \quad (12)$$

і у випадку, коли транспарант не нахилений $\theta = 0, \varphi = 0$, з точністю до множника

$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) \exp(j\chi_{tz} z_t)$ збігається з фур'є-спектром $T(\bar{\chi}_0)$ (11) функції пропускання $\tau(\bar{r}_0)$.

Тому відображення просторово-частотних координат χ_{0x}, χ_{0y} спектра нормально освітленого транспаранта в координати χ_{tx}, χ_{ty} має вигляд

$$\bar{\chi}_t = \|i\| \bar{k}_t, \quad (13)$$

де компоненти \bar{k}_t дорівнюють

$$\begin{aligned} k_{tx} &= k_{ix} + \chi_{0x}, \\ k_{ty} &= k_{iy} + \chi_{0y}, \\ k_{tz} &= \sqrt{k^2 - (k_{ix} + \chi_{0x})^2 - (k_{iy} + \chi_{0y})^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \chi_{tx} &= i_{xx}(k_{ix} + \chi_{0x}) + i_{xy}(k_{iy} + \chi_{0y}) + \\ &+ i_{xz} \sqrt{k^2 - (k_{ix} + \chi_{0x})^2 - (k_{iy} + \chi_{0y})^2}, \\ \chi_{ty} &= i_{yx}(k_{ix} + \chi_{0x}) + i_{yy}(k_{iy} + \chi_{0y}) + \\ &+ i_{yz} \sqrt{k^2 - (k_{ix} + \chi_{0x})^2 - (k_{iy} + \chi_{0y})^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналіз спотворень дифракційного поля

Оскільки перетворення просторово-частотних координат (15) є нелінійним, то лінійний зсув частот на вході системи (тобто в спектрі $T(\bar{\chi}_0)$ функції пропускання) призводить до нелінійного зсуву частот у спектрі $U_t(\bar{\chi}_t)$. Тому система, яка має транспарант, розміщений під кутом до оптичної вісі, є частотно-незалежною [2]. Після підстановки в (14) компоненти $\|i\|$ із (1) і з урахуванням того, що при освітленні вхідного транспаранта плоскою хвилею $k_{ix} = k \sin \theta \cos \varphi$, $k_{iy} = k \sin \theta \sin \varphi$, отримаємо

$$\chi_{tx} = \cos \theta \cdot (k \sin \theta + \chi_{0x} \cos \varphi + \chi_{0y} \sin \varphi) -$$

$$-\sin\theta \sqrt{k^2 - (\chi_{0x} + k \sin\theta \cos\varphi)^2 - (\chi_{0y} + k \sin\theta \sin\varphi)^2}, \quad (16)$$

$$\chi_{ty} = -\sin\varphi \chi_{0x} + \cos\varphi \chi_{0y}.$$

На рис. 3 графічно показано відображення площини просторових частот χ_{0x}, χ_{0y} в χ_{tx}, χ_{ty} за різних значень кутів θ і φ .

Розглянемо деякі часткові випадки виродження двовимірного фур'є-спектра $T(\bar{\chi}_0)$. Якщо $\tau(\bar{r}_0)$ є функцією лише однієї з координат, наприклад y_0 , то спектр $T(\bar{\chi}_0)$ вироджується в одновимірний, а (16) набуває вигляду

$$\chi_{tx} = \cos\theta(k \sin\theta + \chi_{0y} \sin\varphi) - \sin\theta \sqrt{k^2(1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi) - (\chi_{0y} + k \sin\theta \sin\varphi)^2},$$

$$\chi_{ty} = \cos\varphi \chi_{0y},$$

і описує дугу еліпса, на якій локалізується спектр $U_t(\bar{\chi}_t)$.

При $\varphi = 0$ ми можемо записати, що

$$\chi_{tx} = k \sin\theta \cos\theta - \sin\theta \sqrt{k^2 \cos^2\theta - \chi_{0y}^2}. \quad (17)$$

Отриманий нами вище вираз (17) збігається з відомим результатом, одержаним у [1, 3]. Якщо ж $\tau(\bar{r}_0)$ – функція x_0 , то спектр вироджується по χ_{0y} , і

$$\chi_{tx} = \cos\theta(k \sin\theta + \chi_{0x} \cos\varphi) - \sin\theta \sqrt{k^2(1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi) - (\chi_{0x} + k \sin\theta \cos\varphi)^2},$$

$$\chi_{ty} = -\chi_{0x} \sin\varphi,$$

а при $\varphi = 0$, відповідно,

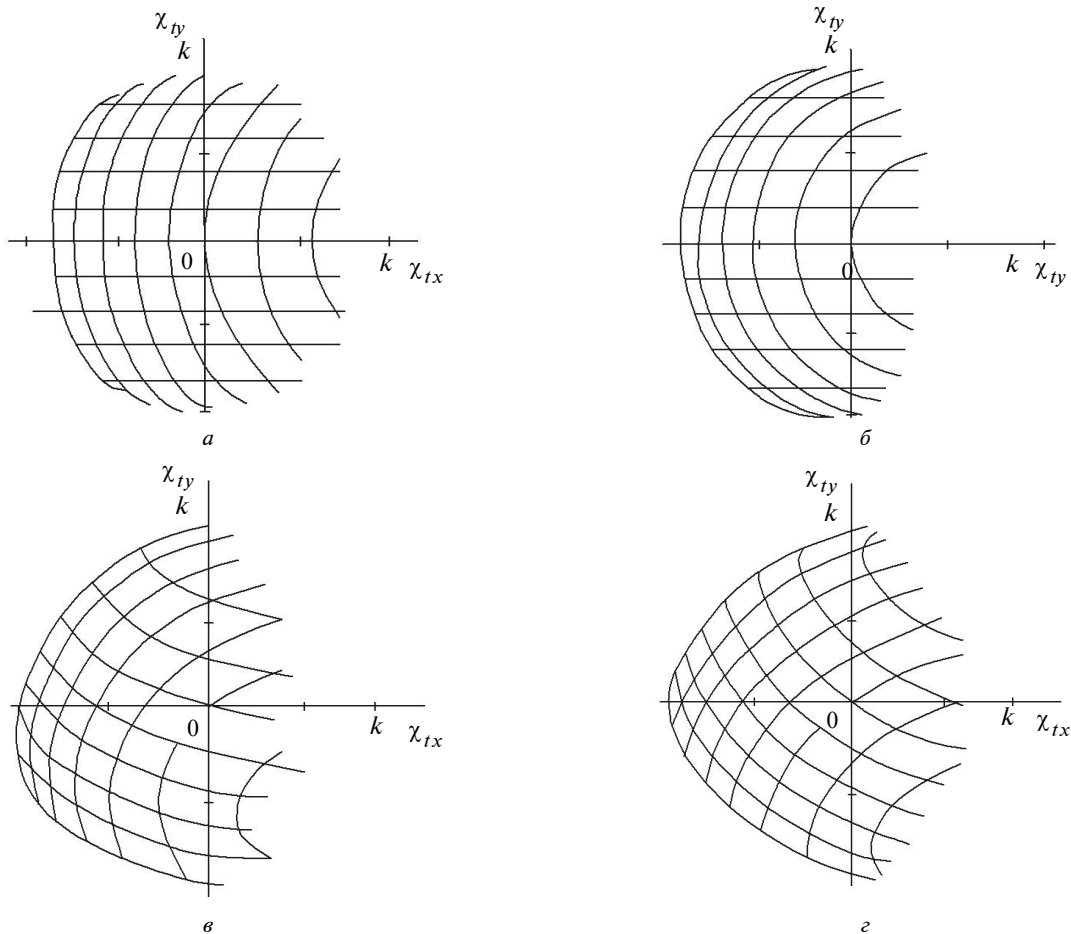


Рис. 3. Перетворення просторово-частотних координат χ_{0x}, χ_{0y} на χ_{tx}, χ_{ty} при кутах повороту: а – $\varphi = 0^\circ, \theta = 30^\circ$; б – $\varphi = 0^\circ, \theta = 60^\circ$; в – $\varphi = 30^\circ, \theta = 60^\circ$; з – $\varphi = 45^\circ, \theta = 45^\circ$; $\chi_{ty} = \chi_{0y}$

$$\begin{aligned} \chi_{tx} &= \cos\theta(k \sin\theta + \chi_{0x}) - \\ & - \sin\theta \sqrt{k^2 - (k \sin\theta + \chi_{0x})^2}, \\ \chi_{ty} &= 0. \end{aligned}$$

У цьому випадку дуга локалізації спектра вироджується в пряму $\chi_{ty} = 0$, але зберігається нелінійне й асиметричне відносно початку координат спотворення частот.

Отримані вище результати справедливі також для спектра хвилі U_S , відбитої від транспаранта. Для доведення цього введемо систему координат $(0, \bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$, орт \bar{z}_s якої збігається з напрямком дзеркального відбиття (див. рис. 2).

Ця система координат має зв'язок з $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ за допомогою матриці $\|S\|$, яка дорівнює (1):

$$\|i\| = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Матриця $\|i\|$ при цьому дорівнює

$$\|i\| = \begin{pmatrix} -\cos\theta \cos\varphi & -\cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

а поле $U_0(\bar{r}_0)$ та його нормальна похідна $\frac{\partial U_0(\bar{r}_0)}{\partial n_0}$ у формулі Гріна (4) відповідно

$$U_0(\bar{r}_0) = (1 + \rho(\bar{r}_0))U_i(\bar{r}_0), \quad (18)$$

$$\frac{\partial U_0(\bar{r}_0)}{\partial n_0} = jk_{iz}(1 - \rho(\bar{r}_0))U_i(\bar{r}_0), \quad (19)$$

де $\rho(\bar{r}_0)$ – коефіцієнт відбиття.

Після підстановки (6), (8), (18) та (19) у (4) отримаємо

$$\begin{aligned} U_S(\bar{r}_1) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k_{ix} - k_{sx}) \delta(k_{iy} - k_{sy}) \times \\ & \times \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{sz}} \right) \exp(j\bar{k}_s \bar{r}_1) dk_{sx} dk_{sy} + \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\bar{r}_0) \left(1 - \frac{k_{iz}}{k_{sz}} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \exp[j(\bar{k}_s \bar{r}_1 - \bar{k}_d \bar{r}_0)] dx_0 dy_0 dk_{sx} dk_{sy}, \quad (20)$$

де \bar{k}_s – вектор, аналогічний \bar{k}_t у (9). Перший інтеграл у (20) дорівнює нулю, а другий фактично збігається з (9) (різниця в знаку перед $\frac{k_{iz}}{k_{sz}}$

формальна і пояснюється відмінністю у виборі систем координат).

Розглянуті вище перетворення координат у частотній області отримані для випадку освітлення транспаранта плоскою хвилею, а в реальній оптичній системі спектр хвилі, що освітлює, має кінцеву ширину і, згідно з [5], визначає форму імпульсного відгуку системи на елементарну фур'є-компоненту в спектрі транспаранта. Нескладний аналіз вказує, що при нахилі транспаранта поряд із перетворенням просторово-частотних координат, які описують положення імпульсного відгуку, виникають також спотворення його форми. Дійсно, вираз (12) з урахуванням (3) можливо записати у вигляді

$$U_t(\bar{\chi}_t) = \frac{|J_t|}{2} \exp(j\chi_{tz} z_t) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) T(\bar{k}_d) U_i(\bar{\chi}_i) d\chi_{ix} d\chi_{iy}.$$

Реакція на елементарну двовимірну гармоніку з амплітудою T_0 і частотами χ_{0x}, χ_{0y} при цьому дорівнює

$$U_t(\bar{\chi}_t) = \frac{T_0}{2} \left(1 + \frac{k_{iz}}{k_{tz}} \right) \exp(j\chi_{tz} z_t) U_i(\bar{\chi}_i),$$

де $\bar{\chi}_i = \|i\| \bar{k}_i$, компоненти \bar{k}_i дорівнюють

$$k_{ix} = k_{tx} - \chi_{0x},$$

$$k_{iy} = k_{ty} - \chi_{0y},$$

$$k_{iz} = \sqrt{k^2 - (k_{tx} - \chi_{0x})^2 - (k_{ty} - \chi_{0y})^2},$$

а $\bar{k}_t = \|i\|^{-1} \bar{\chi}_t$. Таким чином, трансформація просторово-частотних координат χ_{tx}, χ_{ty} спектра пучка, який освітлює, також описується системою рівнянь (13) і призводить до спотворення форми імпульсного відгуку системи в цілому [8, 9].

Засоби когерентної оптики незамінні як інструменти виробничого контролю завдяки від-

носній простоті реалізації, стійкості, високій чутливості та точності. Такі параметри, як товщина плівки, висота мікрорельєфу, розміри неоднорідностей, величина деформації, а також динамічні характеристики об'єктів, такі як зсув, прискорення, напрямок руху, можуть бути визначені з точністю до сотих часток довжини хвилі оптичного випромінювання [10, 11]. Це дає можливість проводити високоточні вимірювання великої кількості розмірних і динамічних параметрів різних об'єктів [12].

Висновки

Дифракційний фур'є-спектр транспаранта, що має нахил до оптичної вісі, має зв'язок з фур'є-спектром нормально освітленого транспаранта за допомогою перетворення координат у просторово-частотній області, яке виражається через елементи матриці повороту транспаранта і в загальному випадку має вигляд (15).

References

- [1] K. Patorsky, "Fraunhofer diffraction patterns of titled planar objects", *Optica Acta*, vol. 30, no. 5, pp. 673–679, 1983. doi: 10.1080/713821241
- [2] H.J. Rabal *et al.*, "Diffraction by a titled aperture. Coherent and partially coherent cases", *Optica Acta*, vol. 32, no. 11, pp. 1309–1311, 1985. doi: 10.1080/713821668
- [3] V. Kolobrodov and G. Tymchik, *Design of Diffraction Optical Elements and Systems*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2012.
- [4] V. Kolobrodov and G. Tymchik, *Applied Diffraction Optics*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2014.
- [5] V.V. Bogatyireva and A.L. Dmitriev, *Optical Methods of Information Processing*. St. Petersburg, Russia: ITMO University, 2009.
- [6] K.E. Okan, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*. Hoboken: Wiley & Sons, 2007.
- [7] G. Curatu and J.E. Harvey, "Analysis and design of wide-angle foveated optical system based on transmissive liquid crystal spatial modulators", *Optical Eng.*, vol. 48, no. 4, pp. 043001-1–043001-10, 2009. doi: 10.1117/1.3122006
- [8] Y. Sheng and P. Ambs, "Diffractive optics", *Optical Eng.*, vol. 43, no. 11, pp. 2503–2504, 2004. doi:10.1117/1.1813443
- [9] V.G. Kolobrodov *et al.*, "The diffraction limit of an optical spectrum analyzer", in *Proc. SPIE 9809, 12th Int. Conf. Correlation Optics*, Nov. 30, 2015, Chernivsti, Ukraine. doi: 10.1117/12.2228534
- [10] Z. Lei *et al.*, "Design of high resolution Fourier transform lens", in *Proc. SPIE 6722, 3rd Int. Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies: Advanced Optical Manufacturing Technologies*, Nov. 16, 2007, Chengdu, China. doi: 10.1117/12.782942
- [11] V.G. Kolobrodov *et al.*, "The problems of designing coherent spectrum analyzers", in *Proc. SPIE 9066, 12th Int. Conf. Correlation Optics*, Dec. 17, 2013. doi: 10.1117/12.2049587
- [12] M.S. Kuz'min and M.S. Rogov, "Optical Fourier processor with a liquid-crystal information-input device", *J. Optical Technol.*, vol. 83, no. 3, pp. 147–152, 2015. doi: 10.1364/JOT.82.000147

Г.С. Тимчик, И.О. Яковенко

ТРАНСФОРМАЦИЯ ДИФРАКЦИОННОГО СПЕКТРА ПРИ УГЛОВОМ НАКЛОНЕ ОБЪЕКТА

Проблематика. В современных информационно-измерительных системах для исследования и обработки пространственных сигналов различной физической природы широкое применение имеет фурье-оптика, что актуализирует проблемы, связанные с формированием дифракционных спектров когерентными оптическими системами. Путем преобразования пространственно-частотных координат фурье-спектра нормально освещенного транспаранта можно получить решение задачи исследования дифракции света на транспаранте, имеющем наклон к оси оптической системы.

Оптична система, яка реалізує фур'є-перетворення функції пропускання (відбиття) транспаранта, що має нахил до оптичної вісі, є частотно-неінваріантною, оскільки при лінійному зсуві просторових частот на вході спостерігаються нелінійний зсув і спотворення форми імпульсного відгуку, які є наслідком нахилу транспаранта і виражаються через елементи матриці повороту.

Оптичні результати і обґрунтовані практичні рекомендації в подальшому будуть використані для реалізації практичних задач із використанням оптичних спектроаналізаторів.

Фінансування

Дослідження виконано за рахунок коштів фінансування проекту ДР 0117 U004263 МОН України.

Цель исследования. С помощью преобразования координат в пространственно-частотной области, которое выражается через элементы матрицы поворота транспаранта, установить связь дифракционного фурье-спектра транспаранта, имеющего наклон к оптической оси, с фурье-спектром нормально освещенного транспаранта.

Методика реализации. Методика базируется на основе преобразования фурье-спектра нормально освещенного транспаранта (моделируемого как волной, которая проходит, так и волной, которая отражается) при его произвольных угловых наклонах в пространстве и в различных частных случаях вырождения двумерного спектра.

Результаты исследования. Полученные результаты и обоснованные практические рекомендации могут быть использованы для реализации практических задач с использованием когерентных оптических спектроанализаторов.

Выводы. Известные фундаментальные исследования дифракции света на транспаранте, имеющем наклон к оси оптической системы, дают решение этой задачи путем преобразования пространственно-частотных координат фурье-спектра нормально освещенного транспаранта. Этот результат обобщен с помощью теоремы Ван Циттерта–Цернике на случай частично-когерентного освещения. Однако в данных исследованиях рассмотрен лишь частный случай наклона плоского транспаранта относительно только одной из координатных осей, а в практических приложениях имеют место двухкоординатные наклоны и продольные сдвиги, пока еще не исследованные. Оптическая система, которая реализует фурье-преобразование функции пропускания (отражения) транспаранта, имеющего наклон к оптической оси, является частотно-неинвариантной, так как при линейном смещении пространственных частот на входе наблюдаются нелинейный сдвиг и искажение формы импульсного отклика, которые являются следствием наклона транспаранта и выражаются через элементы матрицы поворота.

Ключевые слова: фурье-спектр; матрица поворота транспаранта; фурье-преобразование; угловой наклон; когерентная оптическая система.

G.S. Tymchik, I.O. Yakovenko

TRANSFORMATION OF THE DIFFRACTION SPECTRUM AT GRADIENTS OF THE OBJECT

Background. In modern information measuring systems for the study and processing of spatial signals of various physical nature, the Fourier Optics is widely used, which actualizes the problems associated with the formation of diffraction spectra by coherent optical systems. By transforming the spatial-frequency coordinates of the Fourier spectrum of a normally-illuminated transparency, one can obtain a solution to the problem of studying light diffraction on a transparency that has an inclination to the axis of the optical system.

Objective. The aim of the paper is to establish a connection of the diffractive Fourier spectrum of the transparency, which has an inclination to the optical axis of the Fourier spectrum of a normally illuminated transparency, by means of the coordinates' transformation in the space-frequency domain, expressed through the transparency rotation matrix elements.

Methods. The technique is based on the transformation of the Fourier spectrum of a normal-illuminated transparency (which simulated both the passing wave and the reflected wave) at its arbitrary angular slopes in space and various special cases of the two-dimensional spectrum degeneracy.

Results. The obtained results and substantiated practical recommendations can be used for the realization of practical problems using coherent optical spectral analyzers.

Conclusions. The well-known fundamental studies of light diffraction on a transparency that has an inclination to the axis of the optical system have a solution to this problem by transforming the spatial-frequency coordinates of the Fourier spectrum of a normally illuminated transparency. This result is generalized with the help of the Van Cittert–Zernike theorem in the case of a partially coherent illumination. However, in these studies only a partial case of the flat transparency slope is considered in relation to only one of the coordinate axes, and in the practical applications two-coordinate inclinations and longitudinal shifts take place, that have not been investigated at the present time. The optical system that implements the Fourier transform of the transmittance (reflection) function of a transparency that has an inclination to the optical axis is frequency-non-invariant, since at the linear displacement of spatial frequencies at the input there is a nonlinear shift and the impulse response shape distortion due to the transparency slope, and expressed through the elements of the rotation matrix.

Keywords: Fourier spectrum; transparency rotation matrix; Fourier transform; angular inclination; coherent optical system.

Рекомендована Радою
приладобудівного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
6 лютого 2018 року

Прийнята до публікації
29 лютого 2018 року