УДК 519.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.105391

А.Б. Ільєнко*, В.В. Фатенко
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ РЕНЬЇ ПРО ПАРКУВАННЯ

Background. A generalization of the A. Rényi's stochastic parking model is considered. In our model, the probability distribution of the left end of a parked car is a mixture of a uniform distribution and a degenerated one. This allows distinguishing drivers with different skills.

Objective. The aim of the paper is an asymptotic study of the mean number of parked cars $m_p(x)$ when the length of parking space x increases unboundedly.

Methods. A functional-integral equation satisfied by the function m_p is derived. This equation admits an explicit solution in terms of the Laplace transform which allows for applying Tauberian theorems to study the required asymptotics.

Results. For the above model it is shown, that $m_p(x) = \lambda_p x + o(x)$ as $x \to \infty$. The explicit form of the constant λ_p is given by $\frac{1}{1-p}\int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right) ds$. A similar asymptotic bound is obtained for a wider class of models in which the uniform component of the mixture of distributions is replaced by a more general one.

Conclusions. As a generalization of the classical A. Rényi's random parking model, a new parking model is proposed. In this model the uniform distribution of the parking point is replaced by a mixture of a uniform distribution and a degenerated one. In the new model, a counterpart of the Rényi's theorem on the asymptotic behavior of the mean number of parked cars is deduced.

Keywords: Rényi's parking problem; mixture of distributions; asymptotic behavior; functional-integral equation; Laplace transform; Tauberian theorems.

Вступ

Задача про випадкове паркування (відома також як задача про випадкове заповнення відрізка) вперше була розглянута в роботі А. Реньї [1] в 1958 р. і вважається одним із класичних напрямів досліджень у стохастичній геометрії.

У роботі Реньї ця задача вивчалась у наведеній далі постановці. Розглянемо одновимірний паркінг довжиною $x \gg 1$, який можна уявляти собі як відрізок $[0, x]$. На цьому паркінгу послідовно випадковим чином паркуються автомобілі одиничної довжини. Перший із них розміщується на паркінгу згідно з рівномірним законом розподілу — це означає, що координата ξ_1 його лівого кінця є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на відрізку $[0, x-1]$: $\xi_1 \sim U(0, x-1)$. Кожний із наступних автомобілів вибирає для паркування будь-який (наприклад, перший) із вільних проміжків довжиною не менше 1 між уже припаркованими машинами (або між одним із кінців паркінгу та найближчою до нього машиною) та паркується на ньому знову ж таки згідно з рівномірним законом розподілу — $\xi_n \sim U(\theta_-, \theta_+ - 1)$, де θ_- та θ_+ — ліва та права точки вибраного вільного проміжку відповідно. Зауважимо, що при $n \ge 2$ кінці вільного проміжку θ_- та θ_+ є випадковими величинами, вимірними відносно $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, тому розподіл ξ_n є лише умовно рівномірним відносно вказаної σ-алгебри.

Кількість автомобілів, що можуть припаркуватися на паркінгу фіксованої довжини, є скінченною — в деякий момент часу довжини всіх проміжків між припаркованими машинами стають меншими за 1, і процес паркування закінчується. Позначимо $N(x)$ кількість автомобілів, що вдалося припаркувати на паркінгу довжиною x, а $m(x) = \mathbb{E}N(x)$ — її математичне сподівання. В роботі [1] було, зокрема, показано, що має місце співвідношення

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m(x)}{x} = \int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau\right) ds \approx 0,7476. \quad (1)$$

Позначимо λ значення границі в (1). У праці А. Дворецького та Г. Роббінса [2] було показано, що $m(x)$ прямує до лінійної функції $\lambda x + \lambda - 1$ зі

* corresponding author: ilienko@matan.kpi.ua

швидкістю, більшою за експоненціальну. В цій же роботі було отримано центральну граничну теорему для $N(x)$. У подальшому паркувальна модель Реньї та різні її узагальнення вивчалися багатьма авторами, серед них – П. Ней [3], Д. Менніон [4], Г. Соломон і Г. Вейнер [5], М. Пенроуз і Дж. Юкіч [6] та багато інших. Відзначимо також нещодавню роботу С.М. Ананьєвського [7].

У цитованих працях одержані досить загальні теоретичні результати в різних моделях, які істотно узагальнюють класичну модель Реньї. В той же час розгляд настільки загальних задач часто унеможливлює отримання конкретних констант, що з'являються в асимптотичних розкладах для різних характеристик досліджуваних моделей. Тому актуальним залишається вивчення таких узагальнень моделі Реньї, які дають змогу одержувати точні результати. Одному з таких узагальнень і присвячена наша робота.

Постановка задачі

Як і вище, розглянемо одновимірний паркінг $[0, x]$ з $x >> 1$. В узагальнення моделі Реньї будемо вважати, що закон розподілу, згідно з яким кожний автомобіль вибирає місце паркування, є не рівномірним, а сумішшю рівномірного та виродженого розподілів у лівому кінці вільного проміжку. Метою роботи є одержання аналога асимптотичної формули (1) для наведеної моделі паркування.

Опис моделі

Розглянемо більш детально запропоноване узагальнення паркувальної моделі Реньї. Зафіксуємо $p \in [0,1)$ і для кожної пари $(a,b) : 0 \le a < b$ введемо ймовірнісний закон $U_p(a,b)$ з функцією розподілу

$$F_{p,a,b}(x) = p \cdot \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \ge a, \end{cases} +$$

$$+ (1-p) \cdot \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (2)$$

Розподіл $U_p(a,b)$ є сумішшю рівномірного розподілу на $[a,b]$ та виродженого розподілу в точці a.

Будемо вважати, що координата ξ_1 лівого кінця першого припаркованого автомобіля є випадковою величиною з розподілом $U_p(0, x-1)$. Як і в моделі Реньї, кожен із наступних автомобілів вибирає для паркування будь-який із вільних проміжків довжиною не менше 1 між уже припаркованими машинами (або між одним із кінців паркінгу та найближчою до нього машиною) і паркується на ньому за тим же законом – $\xi_n \sim U_p(\theta_-, \theta_+ - 1)$. Тут, як і вище, θ_- та θ_+ позначають ліву та праву точки вибраного вільного проміжку відповідно.

Наведена модель паркування допускає таку інтерпретацію. Припустимо, що кожний водій відноситься до однієї з двох категорій – до "досвідчених", частка яких становить p, або до "недосвідчених", частка яких становить $1 - p$. Досвідчені водії намагаються припаркувати свої машини впритул до вже припаркованих раніше, в той час як недосвідчені паркуються в будь-якій точці вільного проміжку згідно з рівномірним розподілом.

Аналогічно моделі Реньї, будемо позначати $N_p(x)$ кількість автомобілів, що вдалося припаркувати на паркінгу довжиною x, а $m_p(x) = \mathbb{E}N_p(x)$ – математичне сподівання цієї кількості. Основний результат роботи – теорема 1 – описує асимптотичну поведінку $m_p(x)$ при $x \to \infty$ і є аналогом формули (1) для узагальненої паркувальної моделі Реньї.

Зауважимо, що можна було б задати розподіл $U_p(a,b)$ як суміш рівномірного розподілу на $[a,b]$ та виродженого розподілу в точці $b - 1$. Це означало б, що досвідчені водії намагаються припаркувати свої машини в правому кінці вільного проміжку. Отримана в теоремі 1 асимптотична рівність залишається справедливою і в цьому випадку.

Відзначимо також, що за наявності декількох вільних проміжків довжиною не менше 1 спосіб вибору проміжку для паркування насправді не має значення. Теорема 1 є справедливою для будь-якого – детермінованого або рандомізованого – алгоритму вибору вільного проміжку. Надалі ми будемо для визначеності вважати, що кожний автомобіль вибирає перший вільний проміжок.

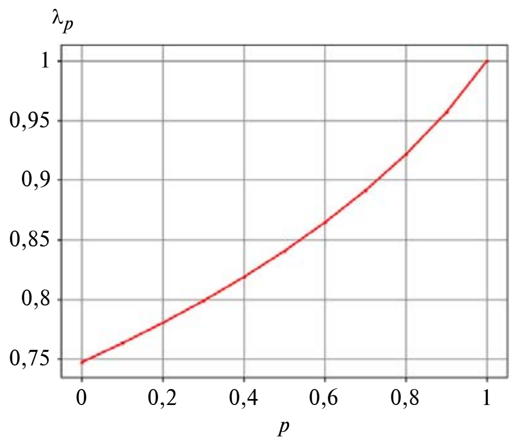
Основний результат

Основним теоретичним результатом роботи є сформульоване нижче твердження.

Теорема 1. У наведеній узагальненій моделі Реньї справедливе таке асимптотичне співвідношення:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m_p(x)}{x} = \frac{1}{1-p}\int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)}\,d\tau\right)ds. \tag{3}$$

Позначимо λ_p значення границі в (3). Досліджувана модель паркування є узагальненням моделі Реньї, до якої вона зводиться при $p = 0$. Тому природним є те, що $\lambda_0 = \lambda$. На рисунку наведений графік залежності λ_p від p, побудований за допомогою числового інтегрування.



Графік залежності λ_p від p

Доведення теореми 1. Для доведення теореми 1 нам будуть потрібні три допоміжних твердження.

Лема 1. Функція $m_p = (m_p(x), x \ge 0)$ є єдиним розв'язком функціонально-інтегрального рівняння

$$m_p(x) = 1 + pm_p(x-1) + \frac{2(1-p)}{x-1}\int_0^{x-1} m_p(t)\,dt, \quad x > 1, \tag{4}$$

що задовольняє початкові умови $m_p(x) = 0$ при $x \in [0,1)$ і $m_p(1) = 1$.

Доведення. Зафіксуємо довжину паркінга $x > 1$. Перший припаркований автомобіль розбиває паркінг на два відрізки — $[0, \xi_1]$ і $[\xi_1 + 1, x]$, де випадкова величина ξ_1 (координата лівого кінця цього автомобіля) розподілена за законом $U_p(0, x-1)$ із функцією розподілу $F_{p,0,x-1}$ вигляду (2). Тому

$$N_p(x) = 1 + N_p(\xi_1) + N_p(x - \xi_1 - 1).$$

Звідси

$$\begin{aligned} m_p(x) &= \mathbb{E}N_p(x) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_p(x)|\xi_1)) = \\ &= 1 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_p(\xi_1)|\xi_1)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_p(x-\xi_1-1)|\xi_1)) = \\ &= 1 + \mathbb{E}(m_p(\xi_1)) + \mathbb{E}(m_p(x-\xi_1-1)) = \\ &= 1 + \int_0^{x-1} m_p(t)\,dF_{p,0,x-1}(t) + \\ &+ \int_0^{x-1} m_p(x-t-1)\,dF_{p,0,x-1}(t) = \\ &= 1 + pm_p(x-1) + \frac{1-p}{x-1}\int_0^{x-1} m_p(t)\,dt + \\ &+ \frac{1-p}{x-1}\int_0^{x-1} m_p(x-t-1)\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Для доведення формули (4) залишається зауважити, що значення інтегралів у правій частині останнього співвідношення є рівними.

Наведені початкові умови є очевидними, виходячи з імовірнісного сенсу функції m_p. Оскільки рівняння (4) із заданими початковими умовами може бути розв'язане послідовно для $x \in (1,2]$, $x \in (2,3]$ і т. д., то його розв'язок є єдиним. □

Розв'язок рівняння (4) не виражається в явному вигляді, але може бути поданий у термінах перетворення Лапласа.

Лема 2. Перетворення Лапласа $M_p = (M_p(u),$ $u \ge 0)$ функції m_p має вигляд

$$M_p(u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-ux} m_p(x)\,dx = \frac{e^{-2Q_p(u)}}{e^u - p}\cdot\int_u^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2}ds, \tag{6}$$

де

$$Q_p(u) = \int_1^u \frac{1-p}{s(e^s - p)}ds. \tag{7}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що $m_p(x) \le x$ для всіх $x \ge 0$, і тому перетворення Лапласа $M_p(u)$ коректно визначено при $u \ge 0$.

Як завжди, будемо позначати η функцію Хевісайда: $\eta(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Рівняння (4) із вказаними початковими умовами можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} m_p(x) &= \eta(x-1) + pm_p(x-1)\eta(x-1) + 2(1-p)\times \\ &\times \frac{\eta(x-1)}{x-1}\int_0^{x-1} m_p(t)\,dt, \\ &x \in [0,1) \cup (1,\infty). \end{aligned} \tag{8}$$

(Значенням у точці 1 можна знехтувати через подальше застосування перетворення Лапласа.) Використовуючи стандартні властивості перетворення Лапласа (часовий зсув, а також інтегрування оригіналу та зображення), рівняння (8) можна легко записати в термінах M_p:

$$e^u M_p(u) = \frac{1}{u} + pM_p(u) + 2(1-p)\int_u^{\infty} \frac{M_p(s)}{s} ds. \quad (9)$$

Продиференціювавши обидві частини рівняння за u, після елементарних перетворень одержимо:

$$\frac{\partial M_p(u)}{\partial u} = -M_p(u)\left(\frac{e^u}{e^u - p} + \frac{2(1-p)}{u(e^u - p)}\right) - \frac{1}{u^2(e^u - p)}.$$

Отримане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Його загальний розв'язок може бути легко знайдений (див., наприклад, [8, с. 31–32]):

$$M_p(u) = C\exp\left\{-\int_1^u \left(\frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2(1-p)}{s(e^s - p)}\right) ds\right\} -$$
$$-\int_1^u \exp\left\{-\int_\tau^u \left(\frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2(1-p)}{s(e^s - p)}\right) ds\right\} \cdot \frac{d\tau}{\tau^2(e^\tau - p)}. \quad (10)$$

Оскільки $\int_1^u \frac{e^s}{e^s - p} ds = \ln\frac{e^u - p}{e - p}$, то, внаслідок (7), маємо

$$\exp\left\{-\int_1^u \left(\frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2(1-p)}{s(e^s - p)}\right) ds\right\} =$$
$$= e^{-2Q_p(u)} \frac{e - p}{e^u - p}. \quad (11)$$

Отже,

$$\int_1^u \exp\left\{-\int_\tau^u \left(\frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2(1-p)}{s(e^s - p)}\right) ds\right\} \cdot \frac{d\tau}{\tau^2(e^\tau - p)} =$$
$$= e^{-2Q_p(u)} \frac{e - p}{e^u - p} \int_1^u \exp\left\{\int_1^\tau \left(\frac{e^s}{e^s - p} + \frac{2(1-p)}{s(e^s - p)}\right) ds\right\} \times$$
$$\times \frac{d\tau}{\tau^2(e^\tau - p)} = e^{-2Q_p(u)} \frac{e - p}{e^u - p} \int_1^u e^{2Q_p(\tau)} \frac{e^\tau - p}{e - p} \frac{d\tau}{\tau^2(e^\tau - p)} =$$
$$= \frac{e^{-2Q_p(u)}}{e^u - p} \int_1^u \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds.$$

Тому з формул (10) і (11) одержуємо

$$M_p(u) = \left(\int_u^1 \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds + K\right) \cdot \frac{e^{-2Q_p(u)}}{e^u - p}, \quad (12)$$

де $K = (e - p)C$ — довільна константа.

Для знаходження константи K у формулі (12) зауважимо, що $M_p(u) \to 0$ при $u \to \infty$, і тому, внаслідок рівняння (9), $M_p(u) = \mathcal{O}(e^{-u})$ при $u \to \infty$. Крім того, очевидно,

$$Q_p(\infty) = \int_1^\infty \frac{1-p}{s(e^s - p)} ds < \infty. \quad (13)$$

Тому вираз у дужках у формулі (12) має бути нескінченно малим при $u \to \infty$. Отже,

$$K = \int_1^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds,$$

що й доводить співвідношення (6). □

Лема 3. Поведінка функції M_p в околі нуля описується асимптотичною формулою

$$M_p(u) \sim \frac{\lambda_p}{u^2}, \; u \to +0.$$

Доведення. Зі співвідношення (7) випливає, що

$$2\ln u - 2Q_p(u) =$$
$$= 2\int_1^u \frac{d\tau}{\tau} - 2\int_1^u \frac{1-p}{\tau(e^\tau - p)} d\tau = -2\int_u^1 \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau.$$

Тому

$$e^{-2Q_p(u)} = \frac{1}{u^2} \exp\left\{-2\int_u^1 \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right\},$$

а отже,

$$e^{-2Q_p(u)} \sim \frac{1}{u^2} \exp\left\{-2\int_0^1 \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right\}, \; u \to +0. \quad (14)$$

(Збіжність невласного інтеграла під знаком експоненти випливає з того, що $e^\tau - 1 \sim \tau$ при $\tau \to 0$.)

Крім того, зауважимо, що інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds = \int_0^1 \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds + \int_1^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2} ds$$

збігається. Дійсно, перший інтеграл у правій частині є збіжним унаслідок формули (14), а збіжність другого випливає з (13). Тому

$$\lim_{u\to+0}\int_u^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2}ds=\int_0^\infty \frac{e^{2Q_p(s)}}{s^2}ds=$$

$$=\int_0^\infty \exp\left(2\int_1^s \frac{1-p}{\tau(e^\tau-p)}d\tau-2\int_1^s\frac{1}{\tau}d\tau\right)ds=$$

$$=\int_0^\infty \exp\left(-2\int_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-p)}d\tau\right)ds. \qquad (15)$$

Отже, з (6), (14) і (15) одержуємо, що при $u\to+0$

$$M_p(u)\sim\frac{u^{-2}}{1-p}\cdot\exp\left(-2\int_0^1\frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-p)}d\tau\right)\times$$

$$\times\int_0^\infty \exp\left(-2\int_1^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-p)}d\tau\right)ds=$$

$$=\frac{u^{-2}}{1-p}\cdot\int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{e^\tau-1}{\tau(e^\tau-p)}d\tau\right)ds=\frac{\lambda_p}{u^2},$$

що й доводить лему 3. □

Доведення теореми 1 випливає тепер із леми 3 і тауберової теореми Феллера для перетворення Лапласа ([9, с. 502, теорема 4]). □

Зауваження. Теорема 1 допускає узагальнення, дещо аналогічне тому, що було розглянуте в теоремі 2 роботи [7]. Нехай $(\tilde f_c,\ c>0)$ – сім'я щільностей розподілу таких, що

а) $\tilde f_c(t)=0$ при $t\notin[0,c]$,

б) $\tilde f_c(t)+\tilde f_c(c-t)=\dfrac{2}{c}$ при $t\in[0,c]$.

Зафіксуємо $p\in[0,1)$ і позначимо $\mathcal{L}_p(a,b)$ ймовірнісний закон із функцією розподілу

$$\tilde F_{p,a,b}(x)=p\cdot\begin{cases}0, & x<a,\\ 1, & x\ge a,\end{cases}+(1-p)\cdot\int_{-\infty}^{x-a}\tilde f_{b-a}(t)dt.$$

Розподіл $\mathcal{L}_p(a,b)$ є сумішшю розподілу з носієм $[a,b]$ і щільністю $\tilde f_{b-a}(\cdot-a)$ та розподілу, виродженого в точці a. Розглянемо модель паркування, аналогічну тій, що вивчалася вище, але з $\xi_n\sim\mathcal{L}_p(\theta_-,\theta_+-1)$ замість $\xi_n\sim U_p(\theta_-,\theta_+-1)$. Виявляється, що в цьому випадку асимптотика $m_p(x)$ при $x\to\infty$ залишається тією ж, що і в попередній моделі.

Для пояснення цього відзначимо, що, аналогічно формулі (5),

$$m_p(x)=1+\int_0^{x-1}m_p(t)d\tilde F_{p,0,x-1}(t)+$$

$$+\int_0^{x-1}m_p(x-t-1)d\tilde F_{p,0,x-1}(t)=$$

$$=1+pm_p(x-1)+(1-p)\int_0^{x-1}m_p(t)\tilde f_{x-1}(t)dt+$$

$$+(1-p)\int_0^{x-1}m_p(x-t-1)\tilde f_{x-1}(t)dt=$$

$$=1+pm_p(x-1)+(1-p)\int_0^{x-1}m_p(t)(\tilde f_{x-1}(t)+$$

$$+\tilde f_{x-1}(x-t-1))dt=$$

$$=1+pm_p(x-1)+\frac{2(1-p)}{x-1}\int_0^{x-1}m_p(t)dt,\quad x>1,$$

де в останній рівності використано властивість б) щільності $\tilde f_{x-1}$. Отримане рівняння збігається з рівнянням (4), і тому всі подальші міркування залишаються справедливими.

Простим прикладом щільності розподілу $\tilde f_c$, що задовольняє умови а) та б), є кусково-лінійна щільність вигляду

$$\tilde f_c(t)=\begin{cases}\dfrac{2(c-t)}{c^2}, & t\in[0,c],\\ 0, & t\notin[0,c].\end{cases}$$

У цьому випадку паркувальна модель допускає таку інтерпретацію: досвідчені водії, як і раніше, припарковують свої машини впритул до вже припаркованих раніше, в той час як недосвідчені паркуються в будь-якій точці вільного проміжку, намагаючись при цьому не від'їжджати дуже далеко від його початку.

Висновки

У роботі розглянуто узагальнення стохастичної моделі паркування А. Реньї. На відміну від оригінальної моделі Реньї, в запропонованій моделі вводяться дві категорії водіїв – "досвідчені" намагаються припаркувати свої машини впритул до вже припаркованих раніше, в той час як "недосвідчені" паркуються в будь-якій точці вільного проміжку згідно з рівномірним розподілом. З математичної точки зору це означає, що умовний розподіл координати лівого кінця кожного припаркованого автомобіля є сумішшю виродженого та рівномірного розподілів.

Для цієї моделі паркування в роботі отримано функціонально-інтегральне рівняння, яке задовольняє математичне сподівання кількості припаркованих автомобілів як функція від довжини паркінгу (лема 1). Це рівняння не може бути розв'язане в явній формі, але його розв'язок допускає знаходження та асимптотичне дослідження в термінах перетворення Лапласа (леми 2 та 3). Це дає змогу застосовувати теореми тауберового типу для вивчення асимптотики вказаного математичного сподівання (теорема 1), що узагальнює відповідний результат Реньї.

Отримані в роботі результати відкривають можливості для подальшого дослідження узагальненої паркувальної моделі Реньї. Зокрема, перспективним було б вивчення асимптотики старших моментів та слабкої збіжності розподілів кількості припаркованих автомобілів, як це було зроблено в [2] для класичної моделі Реньї.

Список літератури

1. *Rényi A.* On a one-dimensional problem concerning random space-filling // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. – 1958. – **3**. – P. 109–127.
2. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the parking problem // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. – 1964. – **9**. – P. 209–224.
3. *Ney P.E.* A random interval filling problem // Ann. Math. Stat. – 1962. – **33**. – P. 702–718.
4. *Mannion D.* Random space-filling in one dimension // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. – 1964. – **9**. – P. 143–154.
5. *Solomon H., Weiner H.J.* A review of the packing problem // Comm. Statist. Th. Meth. – 1986. – **15**. – P. 2571–2607.
6. *Penrose M.D., Yukich J.E.* Limit theory for random sequential packing and deposition // Ann. Appl. Probab. – 2002. – **12**, № 1. – P. 272–301.
7. *Ананьевский С.М.* Некоторые обобщения задачи о "парковке" // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2016. – **3(61)**, вып. 4. – С. 525–532.
8. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння. – 2-ге вид. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 738 с.

References

[1] A. Rényi, "On a one-dimensional problem concerning random space-filling", *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, vol. 3, pp. 109–127, 1958.

[2] A. Dvoretzky and H. Robbins, "On the parking problem", *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, vol. 9, pp. 209–224, 1964.

[3] P.E. Ney, "A random interval filling problem", *Ann. Math. Stat.*, vol. 33, pp. 702–718, 1962.

[4] D. Mannion, "Random space-filling in one dimension", *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, vol. 9, pp. 143–154, 1964.

[5] H. Solomon and H.J. Weiner, "A review of the packing problem", *Comm. Statist. Th. Meth.*, vol. 15, pp. 2571–2607, 1986.

[6] M.D. Penrose and J.E. Yukich, "Limit theory for random sequential packing and deposition", *Ann. Appl. Probab.*, vol. 12, no. 1, pp. 272–301, 2002. doi: 10.1214/aoap/1015961164

[7] S.M. Ananjevskii, "Some generalizations of "parking" problem", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika. Astronomiya*, vol. 3 (61), no. 4, pp. 525–532, 2016 (in Russian). doi: 10.21638/11701/spbu01.2016.401

[8] A.M. Samoilenko *et al.*, *Differential Equations. Textbook*, 2nd ed. Kyiv, Ukraine: Lybid', 2003 (in Ukrainian).

[9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2 (Transl. from the 2nd English ed). Moscow, SU: Mir, 1984 (in Russian).

А.Б. Ільєнко, В.В. Фатенко

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ РЕНЬЇ ПРО ПАРКУВАННЯ

Проблематика. Ми розглядаємо узагальнення стохастичної моделі паркування А. Реньї. В нашій моделі ймовірнісний розподіл координати лівого кінця припаркованого автомобіля є сумішшю рівномірного та виродженого розподілів. Це дає змогу врахувати наявність водіїв із різним досвідом.

Мета дослідження. Метою роботи є вивчення асимптотики математичного сподівання кількості припаркованих автомобілів $m_p(x)$ при необмеженому зростанні довжини паркінгу x.

Методика реалізації. Одержано функціонально-інтегральне рівняння, яке задовольняє функція m_p. Це рівняння допускає явний розв'язок у термінах перетворення Лапласа, що уможливлює застосування тауберових теорем для дослідження потрібної асимптотики.

Результати дослідження. Для наведеної моделі показано, що $m_p(x) = \lambda_p x + \mathcal{O}(x)$ при $x \to \infty$. Явний вигляд константи λ_p задано формулою $\frac{1}{1-p}\int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right) ds$. Аналогічну асимптотичну оцінку отримано для більш широкого класу моделей, у яких рівномірну компоненту суміші розподілів замінено більш загальною.

Висновки. В узагальнення класичної моделі випадкового паркування А. Реньї в роботі запропоновано нову паркувальну модель. У цій моделі рівномірний розподіл місця паркування замінено на суміш рівномірного та виродженого розподілів. У новій моделі отримано аналог теореми Реньї про асимптотичну поведінку математичного сподівання кількості припаркованих автомобілів.

Ключові слова: задача Реньї про паркування; суміш розподілів; асимптотична поведінка; функціонально-інтегральне рівняння; перетворення Лапласа; тауберові теореми.

А.Б. Ильенко, В.В. Фатенко

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕНЬИ О ПАРКОВКЕ

Проблематика. Мы рассматриваем обобщение стохастической модели парковки А. Реньи. В нашей модели вероятностное распределение координаты левого конца припаркованного автомобиля является смесью равномерного и вырожденного распределений. Это позволяет учесть наличие водителей с различным опытом.

Цель исследования. Целью работы является изучение асимптотики математического ожидания количества припаркованных автомобилей $m_p(x)$ при неограниченном возрастании длины парковки x.

Методика реализации. Получено функционально-интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция m_p. Это уравнение допускает явное решение в терминах преобразования Лапласа, что открывает возможность применения тауберовых теорем для исследования нужной асимптотики.

Результаты исследования. Для приведенной модели показано, что $m_p(x) = \lambda_p x + \mathcal{O}(x)$ при $x \to \infty$. Явный вид константы λ_p задается формулой $\frac{1}{1-p}\int_0^\infty \exp\left(-2\int_0^s \frac{e^\tau - 1}{\tau(e^\tau - p)} d\tau\right) ds$. Аналогичная асимптотическая оценка получена для более широкого класса моделей, в которых равномерная компонента смеси распределений заменена более общей.

Выводы. В обобщение классической модели случайной парковки А. Реньи в работе предложена новая модель парковки. В этой модели равномерное распределение места парковки заменено смесью равномерного и вырожденного распределений. В новой модели получен аналог теоремы Реньи об асимптотическом поведении математического ожидания количества припаркованных автомобилей.

Ключевые слова: задача Реньи о парковке; смесь распределений; асимптотическое поведение; функционально-интегральное уравнение; преобразование Лапласа; тауберовы теоремы.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
27 червня 2017 року