УДК 517.581
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.105300

Н.О. Вірченко, О.В. Овчаренко*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ *q*-ФУНКЦІЙ

Background. The new generalization of the function of complex variable (*q*-function) is considered, its main properties are investigated. Such distributions have a special place among the special functions due to their widespread use in many areas of applied mathematics.
Objective. The aim of the paper is to study the new generalization of the function of complex variable for application in applied sciences.
Methods. To obtain scientific results the general methods of the mathematical analysis, and the theory of special functions have been used.
Results. The article deals with new generalization of the function of complex variable — *q*-functions, its main properties are investigated. The theorem on integral representation of $q = x^k$-analytical functions is proved, its inverse formula is constructed.
Conclusions. Considered in the article new generalization of the function of complex variable opens up opportunities for the use of *q*-functions in the theory of special functions, and in the applications of mathematical and physical problems. In the future we plan to use the results to solve the boundary value problems of mathematical physics, in the theory of elasticity, for solving of, the theory of integral equations, etc.
Keywords: function of complex variable; generalized *q*-function; integral equation.

Вступ

У зв’язку з широким використанням теорії спеціальних функцій у фізиці, механіці суцільного середовища, теорії ймовірностей та математичній статистиці, у квантовій механіці, в аеродинаміці, у теорії кодування, у біомедицині тощо інтерес до теорії спеціальних функцій значно посилюється [1—3].

Раціональне узагальнення аналітичних функцій комплексної змінної з’явилось ще у працях Пікара [4]. Він звернув увагу на питання побудови теорії функцій, що справджують систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1u_x + b_1u_y + a_2v_x + b_2v_y = A_1u + A_2v, \\ c_1u_x + d_1u_y + c_2v_x + d_2v_y = B_1u + B_2v, \end{cases}$$

де $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i$ $(i = 1,2)$ — задані функції від x та y, за аналогією до теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

Далі Е. Бельтрамі [5], Л. Берс, А. Гельбарт [6] досліджували функції $f(z) = u + iv$, що справджували систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1(x)u_x = \tau_1(y)v_y, \\ \sigma_2(x)u_y = -\tau_2(y)v_x, \end{cases} \tag{1}$$

де $z = x + iy$, а $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ — задані додатні функції своїх аргументів. Останні (Л. Берс, А. Гельбарт) називають функцію $f(z)$ Σ-моногенною, якщо u та v справджують систему рівнянь (1), запроваджують поняття Σ-похідної, Σ-інтегралу відповідно:

$$\dot{f}(z) = \sigma_1u_x + i\frac{v_x}{\sigma_2} = \tau_1v_y - i\frac{u_y}{\tau_2},$$

$$\Omega = \int \sigma_2 u dx - \tau_2 v dy + i\int \frac{v}{\sigma_1}dx + \frac{u}{\tau_2}dy.$$

Легко пересвідчитись, що $\dot{f}(z)$ і Ω є Σ'-моногенними функціями. У зв’язку з тим що

$$\Sigma'' = \Sigma,$$

одержуємо метод знаходження нових розв’язків системи рівнянь (1) за допомогою Σ-інтегрування та Σ-диференціювання з використанням відомих розв’язків.

Випадок $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = y^{-1}$ розглядав Е. Бельтрамі [5], а випадок $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = y^{-n}$ досліджував А. Вайнштейн [7].

У працях М. Лукомської [8], С. Агмона, Л. Берса [9] було розширено поняття Σ-інтегрування.

*corresponding author: lena_rum@ukr.net

Відмінний від теорії Σ-моногенних функцій напрям узагальнень теорії аналітичних функцій комплексної змінної розглянуто у працях Г.Н. Положого [10]. Він вивчає функції $f(z) = u + iv$ комплексної змінної $z = x + iy$, що визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{p}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{p}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

де p — задана додатна функція від x та y, називає функцію p-аналітичною функцією комплексної змінної, а p — характеристикою; запроваджує поняття інтеграла за спряженими змінними:

$$\int ud\tilde{Z} + ivdZ,$$

де $Z = X + iY$, $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ — спряжені змінні, для яких виконуються умови

$$Z^* = X + i\tilde{Y}, -i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X},$$

де Z^*, $-i\tilde{Z}^*$ — двічі неперервно диференційовані p-аналітичні функції; встановлює аналоги теореми Коші, доводить теорему Ліувілля, будує теорію лишків та ін.

Б.В. Шабат [11], Я. Лопатинський [12], Л. Берс [13] продовжують свої результати, пов'язані з цією тематикою.

Важливі результати з узагальнення теорії аналітичних функцій одержано у працях І.Н. Векуа [14]. У 1956–1957 рр. Г.Н. Положій запроваджує узагальнення поняття p-аналітичної функції, вводить так звані (p, q)-аналітичні функції [10], які визначаються системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} pu_x - qu_y - v_y = 0, \\ qu_x + qu_y + v_x = 0, \end{cases}$$

де p і q — задані дійсні функції від x та y, $p > 0$.

Постановка задачі

Мета статті — розглянути так звані q-функції $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, що справджують умови

$$\begin{cases} \tilde{u}_x = -\dfrac{1}{q}\tilde{v}_x, \\ \tilde{u}_y = -\dfrac{1}{q}\tilde{v}_y, \end{cases} \qquad (2)$$

вивчити їх основні властивості, встановити інтегральні зображення.

Основні властивості *q*-функцій

Рівняння, що визначають клас q-функцій у комплексній формі, матимуть вигляд

$$\sigma\frac{\hat{d}u}{d\bar{z}} + i\frac{\hat{d}v}{d\bar{z}} = 0, \ \sigma = iq$$

або

$$(\sigma + 1)\frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} + (\sigma - 1)\frac{\hat{d}\bar{f}}{d\bar{z}} = 0, \ \sigma = iq,$$

де q — задана функція від x та y. Тут $\dfrac{\hat{d}f}{dz}$ означає операторну похідну:

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{u_x + u_y}{2} + i\frac{v_x - v_y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right).$$

Зауважимо, що правила обчислення операторної похідної такі ж, як і правила обчислення звичайних похідних. Очевидно, що

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{\hat{d}\,\overline{f(z)}}{d\bar{z}},$$

де риска зверху означає комплексну спряженість. Для того щоб вираз $Pdz + Qdz$ був повним диференціалом деякої функції $f(z) = u + iv$, достатньо, щоб

$$\frac{\hat{d}Q}{dz} = \frac{\hat{d}P}{d\bar{z}}.$$

Більше про операторну похідну див. у [10].

Криві, до яких дотичні утворюють з віссю Ox кути Θ і Θ_1:

$$\Theta = -\frac{1}{2}\arg\frac{\hat{d}f}{dz}\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}, \ \Theta_1 = -\frac{1}{2}\arg\frac{\hat{d}f}{dz}\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} + \frac{\pi}{2},$$

називають лініями екстремальних розтягів, а їх образи у площині функції $f(z) = u + iv$ — взаємними лініями.

Для q-функцій взаємні лінії утворюють з віссю u кути:

$$\Theta' = \frac{1}{2}\arg\frac{1-iq}{1+iq},\ \Theta_1' = \Theta' + \frac{\pi}{2}$$

і коефіцієнт розтягів

$$K = \frac{|1-iq| + |1+iq|}{|1+iq| - |1+iq|}.$$

Нехай D — однозв'язна область, лежить у скінченній частині площини $z = x + iy$, q — дійсна функція.

Означення. Функцію $f(z) = u + iv$ комплексної змінної $z = x + iy$ будемо називати q-аналітичною в області D із заданою характеристикою $q = q(x, y)$, якщо вона в цій області визначена, означена, а її дійсна та уявна частини мають неперервні частинні похідні по x та y, справджують систему рівнянь (2).

Кажуть, що функція $f(z) = u + iv$ комплексної змінної $z = x + iy$ q-аналітична у точці $z_0 \neq \infty$, якщо вона q-аналітична в деякій області, що містить точку z_0; q-аналітична в точці $z_0 \neq \infty$, якщо вона q-аналітична як функція від $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{z}$ у точці $\zeta = 0$; q-аналітична в неоднозв'язній області, якщо вона q-аналітична в усякій однозв'язній області, що міститься у цій неоднозв'язній області; q-аналітична в замкненій області, якщо вона q-аналітична у цій області та в точках її межі.

Із означень випливає, що сума та різниця q-аналітичних функцій, а також добуток цих функцій і дійсної сталої є q-аналітичними функціями. Якщо $f^*(z) = u + iv$ — q-аналітична функція, то $f^*(z) = if(z)$ буде q^*-аналітичною функцією, де $q^* = -\frac{1}{q}$.

Якщо $f(z) = u + iv$ — q-аналітична та якобіан $I = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$, то маємо

$$-q\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} = 0,\ -q\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Нехай $f(z) = u + iv$ — функція комплексної змінної $z = x + iy$, має неперервні частинні похідні по x та y, $\sigma = iq$ — заданий неперервний комплексний параметр, неперервно диференційований по x і y достатнє число разів. Операторною q-похідною по $z = x + iy$ називають вираз вигляду

$$\frac{\hat{d}_q f(z)}{dz} = \sigma\frac{\hat{d}u}{dz} + i\frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{-qu_y + v_y}{2} + i\frac{v_x - qu_x}{2}.$$

Очевидно, що:

$$\overline{\frac{\hat{d}_q f(z)}{dz}} = \frac{\hat{d}_{-q}\overline{f(z)}}{d\bar{z}} = \frac{-qu_y + v_y}{2} + i\frac{qu_x - v_x}{2}.$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. Для того щоб функція $f(z) = u + iv$, яка має неперервні частинні похідні по x і y, була q-аналітичною, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\hat{d}_q f(z)}{d\bar{z}} = 0.$$

Справедливість теореми випливає із рівності

$$\frac{\hat{d}_q f(z)}{d\bar{z}} = \frac{-qu_y - v_y}{2} + i\frac{qu_x + v_x}{2}.$$

Інтегральне зображення q-аналітичної функції

D — область у правій півплощині $z = x + iy$, обмежена кривою, монотонною по y, проходить через безмежно віддалену точку. Візьмемо $q = x^k$ $(k = \text{const} > 0)$. Тоді справедливі такі теореми.

Теорема 2. Якщо в області задана функція комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ та має на нескінченності нуль вище k-го порядку, тоді функція $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y)$, визначена рівністю

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y) =$$

$$= (-1)^m \int_x^\infty [v(\xi, y)x^{-k} - iv(\xi, y)]\xi(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad (3)$$

буде $q = x^k$-аналітичною функцією в області D.

Д о в е д е н н я. Для функції $\tilde{f}_1(z)$ визначеною формулою (3) перевіряємо справедливість умов:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^k}\frac{\partial \tilde{v}_1(x, y)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x^k}\frac{\partial \tilde{v}_1(x,y)}{\partial y}. \qquad (5)$$

У (3) виконаємо заміну змінної $\xi = x\beta$:

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x,y) + i\tilde{v}_1(x,y) =$$

$$= (-1)^m \int_1^\infty [v(x\beta,y) - ix^k v(x\beta,y)]\beta(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta.$$

Справедливість умови (5) очевидна. Перевіряємо (4):

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,y)}{\partial x} = (-1)^m \int_1^\infty \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} \beta^2 (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(x,y)}{\partial x} = (-1)^m \frac{\partial}{\partial x} \int_1^\infty (-x^k) v(x\beta,y)\beta(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta =$$

$$= (-1)^m \left[\int_1^\infty (-x^k) \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} \beta^2(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta - \right.$$

$$\left. -kx^{k-1} \int_x^\infty \beta v(x\beta,y)(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta \right] =$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\int_1^\infty x^k \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} \beta^2(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta + \right.$$

$$+ kx^{k-1} \left(\frac{1}{k} (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}} v(x\beta,y) \Big|_{\beta=1}^{\beta=\infty} - \frac{1}{k} \times \right.$$

$$\left. \times \int_1^\infty x \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta) \right] =$$

$$= (-1)^{m+1} \left[\int_1^\infty x^k \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} \beta^2(\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta - \right.$$

$$\left. - \int_1^\infty x^k \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta \right] =$$

$$= (-1)^{m+1} x^k \int_1^\infty \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta.$$

Отже,

$$\frac{\partial \tilde{v}_1(x\beta)}{\partial x} = (-1)^{m+1} x^k \int_1^\infty \frac{\partial v(x\beta,y)}{\partial (x\beta)} (\beta^2-1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta. \quad (7)$$

Врахувавши поведінку функції $\tilde{f}_1(z)$ на ∞ та формули (6), (7), переконуємось у виконанні умови (4).

Теорема 3 (формула обернення для (3)).

Якщо $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x,y) + i\tilde{v}_1(x,y)$ – $q = x^k$- аналітична функція в області D, на ∞ має нуль вище k-го порядку, тоді справедлива така формула обернення:

$$T^{-1}(\tilde{f}_1(z)) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) =$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(m - \frac{k}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times \left\{ -x^{-2m+k} \frac{d}{dx} \int_\infty^x \frac{x^{-2m-k}}{\xi} \frac{d^m \tilde{v}_1(\xi,y)}{(d\xi^2)^m} \times \right.$$

$$\times (\xi^2 - x^2)^{m-\frac{k}{2}} d\xi + ix^{2m+k+2} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} \int_\infty^x \frac{x^{-2m-k}}{\xi} \frac{d^m}{(d\xi^2)^m} [\tilde{u}_1(\xi,y)\xi^{-k}] \times$$

$$\left. \times (\xi^2 - x^2)^{m+\frac{k}{2}} d\xi \right\},$$

якщо k не дорівнює цілому парному числу, та

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left\{ -\frac{d^m}{(dx^2)^m} \tilde{v}_1(x,y) + \right.$$

$$\left. + ix \frac{d^m}{(dx^2)^m} [\tilde{u}_1(x,y) x^{2m-1}] \right\},$$

коли k – парне число.

Д о в е д е н н я. Розглянемо рівняння

$$\tilde{v}_1(x,y) = (-1)^{m+1} \int_x^\infty v(\xi,y)\xi(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi. \qquad (8)$$

Диференціюємо по x^2 m разів:

$$\frac{d^m}{(dx^2)^m}[\tilde{v}_1(x,y)] = -\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-m\right) \times$$

$$\times \int_x^\infty v(\xi,y)\xi(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m-1} d\xi;$$

аналогічно:

$$\frac{d^m}{(dx^2)^m}[\tilde{u}_1(x,y)x^k] = \left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-m\right)\times$$

$$\times\int_x^\infty v(\xi,y)(\xi^2-x^2)^{\frac{k}{2}-m-1}d\xi. \qquad (9)$$

Виконаємо заміну: $\xi^2=\frac{1}{\tau}$, $x^2=\frac{1}{t}$. Рівність (9) набуває вигляду

$$\frac{d^m}{\left(d\frac{1}{t}\right)^m}\left[\tilde{u}_1\left(\frac{1}{\sqrt{t}},y\right)t^{\frac{1-k}{2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-m\right)\times$$

$$\times\int_0^t\frac{v\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}},y\right)}{2t^{\frac{k}{2}-m-1}\tau^{\frac{k}{2}-m+\frac{1}{2}}}(t-\tau)^{\frac{k}{2}-m-1}d\tau. \qquad (10)$$

Запровадивши позначення

$$F(t)=\frac{2t^{\frac{k}{2}-m-1}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{k}{2}-m\right)}\times$$

$$\times\frac{d^m}{\left(d\frac{1}{t}\right)^m}\left[\tilde{u}_1\left(\frac{1}{\sqrt{t}},y\right)t^{\frac{1-k}{2}}\right],$$

$$\varphi(\tau)=\frac{v\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}},y\right)}{2t^{\frac{k}{2}-m-1}\tau^{\frac{k}{2}-m+\frac{1}{2}}}, \qquad (11)$$

переписуємо (10) у вигляді

$$F(\tau)=\int_0^t\varphi(\tau)(t-\tau)^{\frac{k}{2}-m-1}d\tau.$$

А це є інтегральне рівняння Абеля щодо функції $\varphi(\tau)$, розв'язок якого відомий:

$$\varphi(\tau)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-m\right)\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{m-\frac{k}{2}}d\tau.$$

Повертаємось до старих змінних, враховуючи формули (11), одержимо розв'язок інтегрального рівняння (8):

$$v(x,y)=\frac{2x^{2m-k+2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{k}{2}+1\right)}\frac{d}{dx}\int_x^\infty\frac{d^m}{(d\xi^2)^m}\times$$

$$\times[\tilde{u}_1(\xi,y)\xi^k]\frac{x^{k-2m}}{\xi}(\xi^2-x^2)^{m-\frac{k}{2}}d\xi.$$

Висновки

Раціональне узагальнення аналітичних функцій комплексної змінної є об'єктом дослідження багатьох математиків. Так, Л. Берс, А. Гельбарт вводять поняття Σ-моногенної функції, запроваджують поняття Σ-похідної та інтеграла. Таким чином, було одержано важливий метод знаходження нових розв'язків системи рівнянь за допомогою Σ-інтегруваня та диференціювання. В нашій роботі запропоновано відмінний від теорії Σ-моногенних функцій напрям узагальнень аналітичних функцій комплексної змінної, що продовжує дослідження Г.Н. Положого, який запровадив узагальнення поняття *p*-аналітичної функції та ввів (p,q)-аналітичні функції.

У статті запроваджено нове узагальнення функції комплексної змінної — так звані *q*-аналітичні функції, вивчено основні властивості цих функцій. Для подальшого широкого застосування при розв'язанні задач прикладної математики встановлено інтегральне зображення $q=x^k$-аналітичної функції, доведено формулу обернення.

Результати статті — нові, вагомі, перспективні. У майбутньому планується застосовувати *q*-аналітичні функції до розв'язання задач теорії пружності, аеродинаміки, математичної фізики тощо.

Список літератури

1. *Вірченко Н.* Узагальнені гіпергеометричні функції. — К.: НТУУ "КПІ", 2016. — 480 с.
2. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. — Chapman and Hall/CRC, 2004. — 390 p.

3. *Yakubovich S.* Index transforms associated with generalized hypergeometric functions // Math. Methods Appl. Sci. – 2004. – **27**, № 1. – P. 35–46.
4. *Picard E.* Sur la Representation Approchee des Fonctions. – C.R. Acad. Sci. Paris, 1891. – 112 p.
5. *Beltrami E.* Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse // Opere mat. Milano, 1911. – **3**. – P. 115–128.
6. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. Of the Amer. Math. Soc. – 1944. – **56**. – P. 67–93.
7. *Weinstein A.* Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1953. – **59**. – P. 20-38.
8. *Лукомская М.А.* О циклах систем линейных однородных дифференциальных уравнений // Мат. Сб. – 1951. – № 29 (71). – С. 551–558.
9. *Agmon S., Bers L.* The expansion theorem for pseudo-analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**. – P. 757–764.
10. *Положий Г.Н.* Теория и применение *p*-аналитических и (*p*, *q*)-аналитических функций. – К.: Наук. думка, 1973. – 424 с.
11. *Шабат Б.В.* Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов // ДАН СССР. – 1949. – **69**. – С. 305–308.
12. *Лопатинский Я.Б.* Об одном обобщении понятия аналитической функции // УМЖ. – 1950. – **2**. – С. 56–73.
13. *Bers L.* Remark on an application of pseudo-analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1956. – **62**. – P. 291–331.
14. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

References

[1] N. Virchenko, *Generalized Hypergeometric Functions.* Kyiv, Ukraine: NTUU KPI Publ., 2016 (in Ukrainian).

[2] A.A. Kilbas and M. Saigo, *H-Transforms.* London, UK: Chapman and Hall/CRC, 2004.

[3] S. Yakubovich, “Index transforms associated with generalized hypergeometric functions”, *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 27, no. 1, pp. 35–46, 2004. doi: 10.1002/mma.436

[4] E. Picard, *Sur la Representation Approchee des Fonctions.* Paris, France: C.R. Acad. Sci. Paris, 1891.

[5] E. Beltrami, “Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse”, *Opere mat. Milano*, vol. 3, pp. 115–128, 1911.

[6] L. Bers and A. Gelbart, “On a class of functions defined by partial differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 56, pp. 67–93, 1944. doi: 10.1090/S0002-9947-1944-0010910-5

[7] A. Weinstein, “Generalized axially symmetric potential theory”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 59, pp. 20–38, 1953. doi: 10.1090/S0002-9904-1953-09651-3

[8] M.A. Lukomskaia, “On cycles of systems of linear homogeneous differential equations”, *Mat. Sbornik N.S.*, no. 29 (71), pp. 551–558, 1951 (in Russian).

[9] S. Agmon and L. Bers, “The expansion theorem for pseudo-analytic functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 3, pp. 757–764, 1952. doi: 10.1090/S0002-9939-1952-0057349-4

[10] G.N. Polozii, *Theory and Application of p-Analytic and (p, q)-Analytic Functions.* Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka, 1973 (in Russian).

[11] B.V. Shabat, “Cauchy’s theorem and formula for quasi-conformal mappings of linear classes”, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, vol. 69, pp. 305–308, 1949 (in Russian).

[12] Y.B. Lopatinskii, “On one generalization of analytic function”, *UMJ*, no. 2, pp. 56–73, 1950 (in Russian).

[13] L. Bers, “Remark on an application of pseudo-analytic functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 62, pp. 291–331, 1956.

[14] I.N. Vekua, *Generalized Analytic Functions.* Moscow, SU: Fizmatgiz, 1959 (in Russian).

Н.О. Вірченко, О.В. Овчаренко

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ *q*-ФУНКЦІЙ

Проблематика. У статті запроваджено нове узагальнення функції комплексної змінної (*q*-функцію). Такі узагальнені функції мають особливе значення для застосування у численних розділах прикладної математики.

Мета дослідження. Вивчення нового узагальнення функції комплексної змінної для застосування у прикладних науках.

Методика реалізації. Для отримання наукових результатів було використано загальні методи математичного аналізу, теорії спеціальних функцій.

Результати дослідження. Запроваджено нове узагальнення функції комплексної змінної – *q*-функції, вивчено основні властивості узагальненої *q*-функції. Доведено теорему про інтегральне зображення $q = x^k$-аналітичної функції, побудовано формулу обернення.

Висновки. Розглянуте у статті нове узагальнення функції комплексної змінної відкриває широкі можливості для використання q-функцій у теорії спеціальних функцій, у прикладних математичних і фізичних задачах. Планується застосовувати результати до розв'язання крайових задач математичної фізики, у теорії пружності, теорії інтегральних рівнянь тощо.

Ключові слова: функція комплексної змінної; узагальнена q-функція; інтегральне рівняння.

Н.А. Вирченко, Е.В. Овчаренко

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА q-ФУНКЦИЙ

Проблематика. В статье введено новое обобщение функции комплексного переменного (q-функцию). Такие обобщенные функции имеют особенное значение для применения в многочисленных разделах прикладной математики.

Цель исследования. Изучение нового обобщения функции комплексного переменного для применения в прикладных науках.

Методика реализации. Для получения научных результатов были использованы общие методы математического анализа, теории специальных функций.

Результаты исследования. Введено новое обобщение функции комплексного переменного – q-функцию, изучены основные свойства обобщенной q-функции. Доказана теорема об интегральном представлении $q = x^k$-аналитической функции, построена формула обращения.

Выводы. Рассмотренное в статье новое обобщение функции комплексного переменного открывает широкие возможности для использования q-функций в теории специальных функций, в прикладных математических и физических задачах. Планируется применить результаты к решению краевых задач математической физики, в теории упругости, теории интегральных уравнений и др.

Ключевые слова: функция комплексной переменной; обобщенная q-функция; интегральное уравнение.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
26 червня 2017 року