УДК 519.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.103155

О.В. Іванов, О.В. Маляр*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ ТЕКСТУРОВАНОЇ ПОВЕРХНІ

Background. For sinusoidal observation model of textured surface, i.e. model where regression function is a two-parameter harmonic oscillation and noise is a homogeneous isotropic Gaussian random field on the plane with zero mean and covariance function of the special kind, the problem of statistical estimation of sinusoidal model unknown amplitudes and angular frequencies is considered.

Objective. The aim of the paper is to study asymptotic behavior of the least squares estimate (LSE) of unknown amplitudes and angular frequencies of textured surface sinusoidal model.

Methods. The results were obtained on the application of methodology developed in the papers by A.V. Ivanov et al. (2009, 2015) and monograph by A.V. Ivanov, N.N. Leonenko (1989).

Results. Sufficient conditions on random noise covariance function that ensure strong consistency of sinusoidal model parameters LSE are obtained.

Conclusions. The obtained results allow extending them on the models where regression function is a sum of several two-parameter harmonic oscillations. Besides LSE consistency property will allow proving asymptotic normality of these estimates in further works.

Keywords: textured surface; sinusoidal model; homogeneous and isotropic random field; covariance function; slowly varying function; least squares estimate; consistency.

Вступ

У роботі розглядається двовимірна синусоїдна модель спостережень текстурованої поверхні, різні дискретні модифікації якої отримали велику увагу в літературі з обробки сигналів завдяки їх застосуванню в аналізі текстур [1—4], зокрема в обробці так званих симетричних образів відтінків сірого (symmetric gray-scale texture images). Ця проблема має спеціальний інтерес у спектральному аналізі [5] (див. також [4] і наведенні там численні посилання на прикладні роботи).

У нашій роботі досліджується асимптотична поведінка оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів синусоїдної моделі у випадку, коли випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині [6]. З математичної точки зору така постановка проблеми оцінювання є природним узагальненням добре відомої задачі про виявлення прихованих періодичностей (див., наприклад, [7, 8]).

У дискретній постановці задачі, коли помилки спостережень є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, зокрема гауссівськими, асимптотичні властивості ОНК було розглянуто в [9, 10]. Для помилок спостережень, що утворюють дискретне лінійне однорідне поле, ці результати було узагальнено в [11].

Постановка задачі

У цій роботі вивчено властивість консистентності ОНК невідомих амплітуд і кутових частот синусоїдної моделі текстурованої поверхні. Метою дослідження є отримання достатніх умов на коваріаційну функцію випадкового поля — шуму моделі, за яких вказана ОНК є сильно консистентною.

Вихідні положення

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t = (t_1, t_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty), \quad (1)$$

де

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_1^0 t_2) + B^0 \sin(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_2^0 t_2), \quad (2)$$

$\theta^0 = (A^0, B^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \Theta \subset \mathbb{R}^4$ — вектор істинних значень невідомих параметрів, $(A^0)^2 + (B^0)^2 > 0$, Θ — деяка відкрита параметрична множина, в якій амплітуди A, B можуть набувати будь-яких значень, а кутові частоти $\varphi \in \Phi$, де $\Phi = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \underline{\varphi} < \varphi_1 < \varphi_2 < \overline{\varphi} < \infty\}$, $\varepsilon = \{\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}^2\}$, — випадковий шум із нульовим середнім.

* corresponding author: malyar95@ukr.net

Введемо умови.

A1. ε є однорідним ізотропним гауссівським полем із коваріаційною функцією (к.ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, де L — повільно змінна на нескінченності функція.

A2. ε є однорідним ізотропним гауссівським полем таким, що $\|B\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |B(t)|\, dt < \infty$.

Означення. ОНК параметра $\theta^0 \in \Theta$ за спостереженнями $X(t)$, $t \in [0,T]\times[0,T] = \Pi(T)$, називається будь-який випадковий вектор $\theta_T = (A_T, B_T, \varphi_{1T}, \varphi_{2T})$, для якого

$$Q_T(\theta_T) = \min_{\theta\in\Theta^c} Q_T(\theta),$$

$$Q_T(\theta) = T^{-2} \int\limits_{\Pi(T)} [X(t) - g(t,\theta)]^2 dt.$$

Основний результат

Наведені нижче теорема та леми узагальнюють результат роботи [7].

Теорема. Якщо виконується умова **A1** з неспадною функцією L або припущення **A2**, то ОНК θ_T є консистентною оцінкою параметра θ^0, а саме:

$$A_T \to A^0,\ \ B_T \to B^0,$$
$$T(\varphi_{1T} - \varphi_1^0) \to 0,\ \ T(\varphi_{2T} - \varphi_2^0) \to 0 \tag{3}$$

майже напевно (м.н.) при $T \to \infty$.

Доведемо спочатку дві леми. Позначимо $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Лема 1. Якщо виконано припущення **A1** з монотонно неспадною повільно змінною функцією $L(t)$, $t \ge 0$, то

$$\xi(T) =$$
$$= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} T^{-2} \left| \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 \right| \underset{T\to\infty}{\to} 0 \text{ м.н.} \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$\left| \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 \right|^2 =$$

$$= \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i\lambda_1(t_1 - s_1)} \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i\lambda_2(t_2 - s_2)} \varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(s_1,s_2)\, dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 =$$

$$= \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i\lambda_1 u_1 - i\lambda_2 u_2} \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2) \times$$
$$\times\, \varepsilon(v_1, v_2)\, dv_1 dv_2 du_1 du_2 +$$
$$+ \int_0^T\!\!\int_0^T e^{i\lambda_1 u_1 - i\lambda_2 u_2} \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2 + u_2) \times$$
$$\times\, \varepsilon(v_1 + u_1, v_2)\, dv_1 dv_2 du_1 du_2 +$$
$$+ \int_0^T\!\!\int_0^T e^{-i\lambda_1 u_1 + i\lambda_2 u_2} \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2) \times$$
$$\times\, \varepsilon(v_1, v_2 + u_2)\, dv_1 dv_2 du_1 du_2 +$$
$$+ \int_0^T\!\!\int_0^T e^{i\lambda_1 u_1 + i\lambda_2 u_2} \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2) \times$$
$$\times\, \varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2)\, dv_1 dv_2 du_1 du_2.$$

Таким чином,

$$E\xi^2(T) \le$$
$$\le \frac{2}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T E \left| \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1, v_2)\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2)\, dv_1 dv_2 \right| \times$$
$$\times\, du_1 du_2 +$$
$$+ \frac{2}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T E \left| \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} \varepsilon(v_1 + u_1, v_2)\varepsilon(v_1, v_2 + u_2)\, dv_1 dv_2 \right| \times$$
$$\times\, du_1 du_2 \le \frac{2}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T \Psi_1^{1/2}(u_1,u_2)\, du_1 du_2 +$$
$$+ \frac{2}{T^2} \int_0^T\!\!\int_0^T \Psi_2^{1/2}(u_1,u_2)\, du_1 du_2,$$

де за формулою Ісерліса [12]

$$\Psi_1(u_1,u_2) =$$
$$= \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2}\!\!\int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} E\varepsilon(v_1 + u_1, v_2 + u_2)\varepsilon(v_1, v_2) \times$$
$$\times\, \varepsilon(w_1 + u_1, w_2 + u_2)\varepsilon(w_1, w_2)\, dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 =$$
$$= (T - u_1)^2 (T - u_2)^2 B^2(u_1, u_2) +$$
$$+ \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2}\!\!\int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} B^2(v_1 - w_1, v_2 - w_2)\, dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 +$$
$$+ \int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2}\!\!\int_0^{T-u_1}\!\!\int_0^{T-u_2} B(v_1 - w_1 + u_1, v_2 - w_2 + u_2) \times$$
$$\times\, B(v_1 - w_1 - u_1, v_2 - w_2 - u_2)\, dv_1 dv_2 dw_1 dw_2 =$$
$$= \Psi_{11}(u_1,u_2) + \Psi_{12}(u_1,u_2) + \Psi_{13}(u_1,u_2),$$

$$\Psi_2(u_1,u_2)=$$
$$=\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} E\varepsilon(v_1+u_1,v_2)\varepsilon(v_1,v_2+u_2)\times$$
$$\times\varepsilon(w_1+u_1,w_2)\varepsilon(w_1,w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=$$
$$=(T-u_1)^2(T-u_2)^2B(u_1,u_2)B(u_1,-u_2)+$$
$$+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} B^2(v_1-w_1,v_2-w_2)dv_1dv_2dw_1dw_2+$$
$$+\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2}\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_2} B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2-u_2)\times$$
$$\times B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2+u_2)dv_1dv_2dw_1dw_2=$$
$$=\Psi_{21}(u_1,u_2)+\Psi_{22}(u_1,u_2)+\Psi_{23}(u_1,u_2).$$

Оскільки

$$\Psi_i^{1/2}(u_1,u_2)\le\Psi_{i1}^{1/2}(u_1,u_2)+\Psi_{i2}^{1/2}(u_1,u_2)+\Psi_{i3}^{1/2}(u_1,u_2),$$
$$i=1,2,$$

то

$$E\xi^2(T)\le\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}I_{ij}(T),$$
$$I_{ij}(T)=2T^{-4}\int_0^T\int_0^T\Psi_{ij}^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2. \tag{5}$$

Оцінимо кожний доданок у (5) окремо. Позначимо

$$b_u(v_1-w_1,v_2-w_2)=$$
$$=B(v_1-w_1+u_1,v_2-w_2+u_2)B(v_1-w_1-u_1,v_2-w_2-u_2)$$

і зробимо в інтегралі $\Psi_{13}(u_1,u_2)$ послідовну заміну змінних $v_2\to v_2/T$, $w_2\to w_2/T$; $v_2-w_2\to v_2$, $v_1\to v_1/T$, $w_1\to w_1/T$; $v_1-w_1\to v_1$:

$$\Psi_{13}(u_1,u_2)=$$
$$=T^2\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_1}\int_0^{1-(u_2/T)}\int_0^{1-(u_2/T)} b_u(v_1-w_1,T(v_2-w_2))\times$$
$$\times dv_2dw_2dv_1dw_1=$$
$$=T^2\int_0^{T-u_1}\int_0^{T-u_1}\int_{-1+(u_2/T)}^{1-(u_2/T)}(1-(u_2/T)-|v_2|)\times$$
$$\times b_u(v_1-w_1,Tv_2)dv_2dv_1dw_1=$$
$$=T^4\int_{-1+(u_1/T)}^{1-(u_1/T)}\int_{-1+(u_2/T)}^{1-(u_2/T)}(1-u_1/T)(1-u_2/T)\times$$
$$\times(1-|v_1|/(1-u_1/T))\times$$
$$\times(1-|v_2|/(1-u_2/T))\,b_u(Tv_1,Tv_2)dv_2dv_1\le$$
$$\le T^4(1-u_1/T)(1-u_2/T)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}b_u(T(v_1,v_2))dv_2dv_1\le$$
$$\le T^4(1-u_1/T)(1-u_2/T)\times$$
$$\times\Bigg[\int_0^1\int_0^1 B(Tv_1+u_1,Tv_2+u_2)dv_2dv_1+$$
$$+\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0}B(Tv_1-u_1,Tv_2-u_2)dv_2dv_1+$$
$$+\int_0^1\int_{-1}^{0}B(Tv_1+u_1,Tv_2+u_2)\times$$
$$\times B(Tv_1-u_1,Tv_2-u_2)dv_2dv_1+$$
$$+\int_{-1}^{0}\int_0^1 B(Tv_1+u_1,Tv_2+u_2)\times$$
$$\times B(Tv_1-u_1,Tv_2-u_2)dv_2dv_1\Bigg]. \tag{6}$$

Із монотонності повільно змінної функції L в умові **A1** випливає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ за достатньо великих T (скажімо, при $T>T_0$)

$$B(Tv_1+u_1,Tv_2+u_2)=(L(Tv+u))/(Tv+u^{\alpha})\le$$
$$\le(1+\varepsilon)v^{-\alpha}\cdot L(T)T^{-\alpha}=(1+\varepsilon)v^{-\alpha}B(T),$$
$$B(Tv_1+u_1,Tv_2+u_2)B(Tv_1-u_1,Tv_2-u_2)=$$
$$=((L(Tv+u))/(Tv+u^{\alpha}))\cdot((L(Tv-u))/(Tv-u^{\alpha}))\le$$
$$\le(1+\varepsilon)^2v_1^{-\alpha}v_2^{-\alpha}\cdot L^2(T)T^{-2\alpha}=(1+\varepsilon)^2v_1^{-\alpha}v_2^{-\alpha}B^2(T),$$

і, завдяки парності к.ф. B,

$$\Psi_{13}(u_1,u_2)\le T^4(1-u_1/T)(1-u_2/T)\times$$
$$\times[2^{1-\alpha/2}\pi(2-\alpha)^{-1}(1+\varepsilon)L(T)T^{-\alpha}+$$
$$+(-1)^{-\alpha}2(1-\alpha)^{-2}(1+\varepsilon)^2L^2(T)T^{-2\alpha}],$$
$$I_{13}(T)\le C_1L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}+C_2L(T)T^{-\alpha}, \tag{7}$$

де C_1, C_2 – деякі сталі, що виникли при інтегруванні.

Аналогічно попереднім міркуванням отримуємо оцінки для $I_{ij}(T)$, $i=1,2;$ $j=1,2,3,$ із формули (5). Тому при $T\to\infty$

$$E\xi^2(T) = O(L^{1/2}(T)T^{-\alpha/2}).$$

Нехай $T_n = n^{-\alpha\beta/2}$, де $\beta > 2/\alpha$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi^2(T_n) < +\infty,$$

тобто $\xi(T_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н.

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\zeta_n = \sup_{T\in[T_n,T_{n+1}]} |\xi(T) - \xi(T_n)| =$$

$$= \sup_{T_n\le T\le T_{n+1}} \left| \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T^{-2} \int_0^T\int_0^T e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| - \right.$$

$$\left. - \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T_n^{-2} \int_0^{T_n}\int_0^{T_n} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n\le T\le T_{n+1}} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T^{-2} \int_0^T\int_0^T e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 - \right.$$

$$\left. - T_n^{-2} \int_0^{T_n}\int_0^{T_n} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n\le T\le T_{n+1}} \left[\sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| (T^{-2} - T_n^{-2}) \int_0^{T_n}\int_0^{T_n} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \times \right.\right.$$

$$\left. \times \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T^{-2} \int_{T_n}^{T}\int_0^{T_n} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| +$$

$$+ \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T^{-2} \int_{T_n}^{T}\int_{T_n}^{T} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| +$$

$$\left. + \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^2} \left| T^{-2} \int_0^{T_n}\int_{T_n}^{T} e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 \right| \right] \le$$

$$\le (T_{n+1}^2 - T_n^2)T_n^{-2}\xi(T_n) + T_n^{-2} \int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_0^{T_n} |\varepsilon(t_1,t_2)|\, dt_1dt_2 +$$

$$+ T_n^{-2} \int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t_1,t_2)|\, dt_1dt_2 + T_n^{-2} \int_0^{T_n}\int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t_1,t_2)|\, dt_1dt_2 =$$

$$= \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)} + \zeta_n^{(3)} + \zeta_n^{(4)}.$$

Очевидно, $\zeta_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н. Крім цього,

$$E(\zeta_n^{(2)})^2 \le (T_{n+1}T_n^{-1} - 1)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Аналогічно,

$$E(\zeta_n^{(3)})^2 \le (T_{n+1}T_n^{-1} - 1)^4 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

$$E(\zeta_n^{(4)})^2 \le (T_{n+1}T_n^{-1} - 1)^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Таким чином, $\zeta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ м.н., і лему 1 доведено.

Лема 2. Якщо виконано припущення **A2**, то справедливе (4).

Д о в е д е н н я. Аналогічно (6), (7) отримуємо

$$\Psi_{13}(u_1,u_2) \le (T-u_1)(T-u_2)\|B\|_2^2,$$

де

$$\|B\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(u_1,u_2)du_1du_2 < \infty.$$

Така ж сама оцінка справедлива й для $\Psi_{12}(u_1,u_2)$. Тому маємо далі

$$\Psi_1(u_1,u_2) \le (T-u_1)^2(T-u_2)^2 B^2(u_1,u_2) +$$

$$+ 2(T-u_1)(T-u_2)\|B\|_2^2,$$

$$2T^{-4}\int_0^T\int_0^T \Psi_1^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2 \le$$

$$\le 2T^{-2}\int_0^T\int_0^T |B(u_1,u_2)|\, du_1du_2 +$$

$$+ 2\sqrt{2}T^{-1}B^{1/2}(0)\|B\|_1^{1/2} \underset{T\to\infty}{\to} 0.$$

Використовуючи аналогічні міркування, отримуємо оцінку для $\Psi_2(u_1,u_2)$:

$$\Psi_2(u_1,u_2) \le (T-u_1)^2(T-u_2)^2 B(u_1,u_2)\, B(u_1,-u_2) +$$

$$+ 2(T-u_1)(T-u_2)\|B\|_2^2,$$

$$2T^{-4}\int_0^T\int_0^T \Psi_1^{1/2}(u_1,u_2)du_1du_2 \le$$

$$\le 2T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sqrt{B(u_1,u_2)B(u_1,-u_2)}\, du_1du_2 +$$

$$+ 2\sqrt{2}T^{-1}B^{1/2}(0)\|B\|_1^{1/2} \underset{T\to\infty}{\to} 0.$$

Тому при $T\to\infty$

$$E\xi^2(T) = O(T^{-1}).$$

Подальші міркування збігаються з доведенням леми 1.

Доведення теореми використовує схему робіт [7, 8, 13].

Позначимо

$$x_k = \frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}, \quad y_k = \frac{1 - \cos T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}, \quad k = 1, 2, \qquad (8)$$

та покажемо, що

$$\begin{aligned} A_T &= A^0(x_1x_2 - y_1y_2) - B^0(x_1y_2 + y_1x_2) + o(1), \\ B_T &= A^0(y_1x_2 + x_1y_2) + B^0(x_1x_2 - y_1y_2) + o(1), \end{aligned} \qquad (9)$$

де $o(1)$ позначають, взагалі кажучи, різні випадкові величини, що залежать від T і прямують до нуля м.н. при $T \to \infty$.

Диференціювання функціонала $Q_T(\theta)$ за змінними A, B приводить до такої системи лінійних рівнянь відносно о.н.к. A_T і B_T:

$$\begin{cases} a_1(T)A_T + b_1(T)B_T = c_1(T), \\ a_2(T)A_T + b_2(T)B_T = c_2(T), \end{cases} \qquad (10)$$

де

$$\langle u(t_1,t_2), v(t_1,t_2)\rangle = T^{-2}\int_0^T\int_0^T u(t_1,t_2)v(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

$$a_1(T) = \langle \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle,$$

$$a_2(T) = \langle \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2),\ \sin(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle,$$

$$b_1(T) = \langle \sin(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle,$$

$$b_2(T) = \langle \sin(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2),\ \sin(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle,$$

$$c_1(T) = \langle X(t),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle,$$

$$c_2(T) = \langle X(t),\ \sin(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle.$$

Беручи до уваги властивості параметричної множини Φ, у замиканні якої набуває значення о.н.к. $\varphi_T = (\varphi_{1T}, \varphi_{2T})$, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} a_1(T) = 1/2 + o(1),\ & b_2(T) = 1/2 + o(1), \\ a_2(T) = o(1),\ & b_1(T) = o(1). \end{aligned} \qquad (11)$$

Маємо далі

$$c_1(T) = \langle \varepsilon(t_1,t_2),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle +$$
$$+ \langle g(t_1,t_2;\theta^0),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle = d_1(T) + d_2(T),$$

причому $d_1(T) = o(1)$ за лемами 1 та 2,

$$d_2(T) = A^0\langle \cos(\varphi_1^0t_1 + \varphi_2^0t_2),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle +$$
$$+ B^0\langle \sin(\varphi_1^0t_1 + \varphi_2^0t_2),\ \cos(\varphi_{1T}t_1 + \varphi_{2T}t_2)\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= (A^0/2)(x_1x_2 - y_1y_2) - (B^0/2)(x_1y_2 + y_1x_2), \\ &c_1(T) = (A^0/2)(x_1x_2 - y_1y_2) - \\ &- (B^0/2)(x_1y_2 + y_1x_2) + o(1). \end{aligned} \qquad (12)$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} c_2(T) &= (A^0/2)(y_1x_2 + x_1y_2) + \\ &+ (B^0/2)(x_1x_2 - y_1y_2) + o(1). \end{aligned} \qquad (13)$$

Співвідношення (9) випливають із (10)–(13).

Оскільки $|x_k|, |y_k| \le 1$, то з (9) отримуємо

$$|A_T|, |B_T| \le 2|A^0| + 2|B^0| + o(1). \qquad (14)$$

Нехай

$$\triangle g(t;\theta_T,\theta^0) = g(t_1,t_2;\theta_T) - g(t_1,t_2;\theta^0),$$

$$G_T(\theta_T,\theta^0) = \langle \triangle g(t;\theta_T,\theta^0), \triangle g(t;\theta_T,\theta^0)\rangle.$$

За означенням ОНК,

$$Q_T(\theta_T) \le Q_T(\theta^0). \qquad (15)$$

З іншого боку,

$$Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) =$$
$$= G_T(\theta_T,\theta^0) + 2\langle \varepsilon(t_1,t_2),\ \triangle g(t;\theta_T,\theta^0)\rangle, \qquad (16)$$

де завдяки лемам 1, 2 та оцінкам (14)

$$\langle \varepsilon(t_1,t_2), \triangle g(t;\theta_T,\theta^0)\rangle = o(1). \qquad (17)$$

Беручи до уваги нерівність (15), з (16) і (17) виводимо, що

$$G_T(\theta_T,\theta^0) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \quad \text{м.н.} \qquad (18)$$

Користуючись попередніми міркуваннями (аналогічно (11)) та позначеннями (8), (9), знаходимо, що

$$\begin{aligned} G_T(\theta_T,\theta^0) &= (1/2)(A_T^2 + B_T^2 + (A^0)^2 + \\ &+ (B^0)^2) - A_TA^0(x_1x_2 - y_1y_2) + \\ &+ A_TB^0(x_1y_2 + y_1x_2) - B_TA^0(y_1x_2 + x_1y_2) - \\ &- B_TB^0(x_1x_2 - y_1y_2) + o(1) = \\ &= (1/2)[(A^0(x_1x_2 - y_1y_2) - B^0(x_1y_2 + y_1x_2))^2 + \\ &+ (A^0(y_1x_2 + x_1y_2) + B^0(x_1x_2 - y_1y_2))^2 + \\ &+ (A^0)^2 + (B^0)^2] + [A^0(x_1x_2 - y_1y_2) - \\ &- B^0(x_1y_2 + y_1x_2)][B^0(y_1x_2 + x_1y_2) - \\ &- A^0(x_1x_2 - y_1y_2)] - [A^0(y_1x_2 + x_1y_2) + \\ &+ B^0(x_1x_2 - y_1y_2)][A^0(y_1x_2 + x_1y_2) + \end{aligned}$$

$$+B^0(x_1x_2 - y_1y_2)] + o(1) = (1/2)[(A^0)^2 + (B^0)^2 -$$
$$-((A^0)^2 + (B^0)^2)((x_1x_2 - y_1y_2)^2 +$$
$$+(y_1x_2 + x_1y_2)^2)) + o(1) = (1/2)((A^0)^2 +$$
$$+(B^0)^2)(1 - (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)) + o(1) =$$
$$= (1/2)((A^0)^2 + (B^0)^2) \times$$
$$\times \left(1 - \left(\frac{\sin(T/2)(\varphi_{1T} - \varphi_1^0)}{(T/2)(\varphi_{1T} - \varphi_1^0)}\right)^2 \times\right.$$
$$\left.\times \left(\frac{\sin(T/2)(\varphi_{2T} - \varphi_2^0)}{(T/2)(\varphi_{2T} - \varphi_2^0)}\right)^2\right) + o(1).$$

Таким чином, для того щоб виконувалось (18), необхідно і достатньо, щоб

$$T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \quad \text{м.н.}, \quad k = 1,2. \qquad (20)$$

Зі співвідношень (20), очевидно, випливає, що

$$x_k \xrightarrow[T\to\infty]{} 1, \quad y_k \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \quad \text{м.н.}, \quad k = 1,2.$$

Тоді консистентність оцінок A_T, B_T є наслідком рівностей (9).

Висновки

Синусоїдна модель спостережень текстурованої поверхні з однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині як шумом раніше не розглядалась. Запропонована методика доведення консистентності ОНК параметрів цієї польової моделі є узагальненням відповідного підходу у випадку одновимірної моделі виявлення прихованих періодичностей [7, 8].

Використовуючи та розвиваючи цю методику, можна, по-перше, поширити отримані результати на моделі, в яких функція регресії є сумою декількох двопараметричних гармонічних коливань, і по-друге, використати консистентність ОНК для отримання її асимптотичної нормальності.

Список літератури

1. *Francos J.M., Meiri A.Z., Porat B.* A united texture model based on 2-D Wald type decomposition // IEEE Trans. Signal Process. – 1993. – **41**. – P. 2665–2678.
2. *Yuan T., Subba Rao T.* Spectrum estimation for random fields with application to Markov modeling and texture classification // Markov Random Fields, Theory and Applications / R. Chellappa, A.K. Jain, eds. – New York: Academic Press, 1993.
3. *Zhang H., Mandrekar V.* Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes // J. Time Ser. Anal. – 2001. – **22**. – P. 613–629.
4. *Nandi S., Kundu D., Srivastava R.K.* Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model // Computation Statistics and Data Analysis. – 2013. – **58**. – P. 147–161.
5. *Malliavan P.* Estimation d'un signal Lorentzien // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1 (Mathematique). – 1994. – **319**. – P. 991–997.
6. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Statistical Analysis of Random Fields. – Dordecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1989. – 244 p.
7. *Ivanov A.V.* Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence // Theor. Probability Math. Statist. – 2010. – **80**. – P. 61–69.
8. *Estimation* of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // Statistics: J. Theor. Appl. Statist. – 2015. – **49**. – P. 156–186.
9. *Rao C.R., Zhao L.C., Zhou B.* Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential // IEEE Trans. Signal Process. – 1994. – **42**. – P. 795–802.
10. *Kundu D., Mitra A.* Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 1996. – **7**. – P. 135–150.
11. *Kundu D., Nandi S.* Determination of discrete spectrum in a random field // Statistica Neerlandica. – 2003. – **57**, № 2. – P. 258–284.
12. *Gihman I.I., Skorokhod A.V.* Introduction to the Theory of Random Processes. – New York: Dover Publications, 1996. – 544 p.
13. *Ivanov A.V.* A solution of the problem of detecting hidden periodicities // Theor. Probab. Math. Statist. – 1980. – **29**. – P. 51–68.

References

[1] J.M. Francos *et al.*, "A united texture model based on 2-D Wald type decomposition", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, pp. 2665–2678, 1993.

[2] T. Yuan and T. Subba Rao, "Spectrum estimation for random fields with application to Markov modeling and texture classification", in *Markov Random Fields, Theory and Applications*, R. Chellappa and A.K. Jain, eds. New York: Academic Press, 1993.

[3] H. Zhang and V. Mandrekar, "Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes", *J. Time Series Anal.*, vol. 22, pp. 613–629, 2001.

[4] S. Nandi *et al.* "Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model", *Computation Statistics and Data Analysis*, vol. 58, pp. 147–161, 2013. doi: 10.1016/j.csda.2011.03.002

[5] P. Malliavan, "Estimation d'un signal Lorentzien", *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie 1 (Mathematique)*, vol. 319, pp. 991–997, 1994.

[6] A.V. Ivanov and N.N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields.* Dordecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989, 244 p.

[7] O.V. Ivanov, "Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence", *Theor. Probability Math. Statist.*, vol. 80, pp. 61–69, 2010. doi: 10.1090/S0094-9000-2010-00794-0

[8] A.V. Ivanov *et al.*, "Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors", *Statistics: J. Theor. Appl. Statist.*, vol. 49, pp. 156–186, 2015. doi: 10.1080/02331888.2013.864656

[9] C.R. Rao *et al.*, "Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 42, pp. 795–802, 1994. doi: 10.1109/78.298285

[10] D. Kundu and A. Mitra, "Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals", *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 7, pp. 135–150, 1997.

[11] D. Kundu and S. Nandi, "Determination of discrete spectrum in a random field", *Statistica Neerlandica*, vol. 57, no. 2, pp. 258–284, 2003. doi: 10.1111/1467-9574.00230

[12] I.I. Gihman and A.V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes.* New York: Dover Publications, 1996.

[13] A.V. Ivanov, "A solution of the problem of detecting hidden periodicities", *Theor. Probab. Math. Statist.*, vol. 29, pp. 51–68, 1980.

О.В. Іванов, О.В. Маляр

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ ТЕКСТУРОВАНОЇ ПОВЕРХНІ

Проблематика. Для синусоїдної моделі спостережень текстурованої поверхні, тобто моделі, в якій функція регресії є двопараметричним гармонійним коливанням, а шум – однорідним та ізотропним гауссівським випадковим полем на площині з нульовим середнім і коваріаційною функцією спеціального виду, розглянуто задачу статистичного оцінювання невідомих амплітуд і кутових частот синусоїдної моделі.

Мета дослідження. Вивчити асимптотичну поведінку оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих амплітуд і кутових частот синусоїдної моделі текстурованої поверхні.

Методика реалізації. Отримання результатів роботи ґрунтується на застосуванні методології, розвинутої в працях О.В. Іванова та ін. (2009, 2015 рр.) та монографії О.В. Іванова, М.М. Леоненка (1989 р.).

Результати дослідження. Отримано достатні умови на коваріаційну функцію випадкового шуму, за яких ОНК параметрів синусоїдної моделі є сильно консистентною.

Висновки. Отримані результати дають можливість їх узагальнення на моделі, в яких функція регресії є сумою декількох двопараметричних гармонійних коливань. Крім цього, властивість консистентності ОНК дасть змогу довести асимптотичну нормальність цих оцінок у наступних роботах.

Ключові слова: текстурована поверхня; синусоїдна модель; однорідне та ізотропне випадкове поле; коваріаційна функція; повільно змінна функція; оцінка найменших квадратів; консистентність.

А.В. Иванов, А.В. Маляр

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПАРАМЕТРОВ ТЕКСТУРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проблематика. Для синусоидальной модели наблюдений текстурированной поверхности, т.е. модели, в которой функция регрессии является двупараметричным гармоническим колебанием, а шум – однородным и изотропным гауссовским случайным полем на плоскости с нулевым средним и ковариационной функцией специального вида, рассмотрена задача статистического оценивания неизвестных амплитуд и угловых частот синусоидальной модели.

Цель исследования. Изучить асимптотическое поведение оценки наименьших квадратов (ОНК) неизвестных амплитуд и угловых частот синусоидальной модели текстурированной поверхности.

Методика реализации. Получение результатов работы опирается на применение методологии, развитой в работах А.В. Иванова и др. (2009, 2015 гг.) и монографии А.В. Иванова, Н.Н. Леоненко (1989 г.).

Результаты исследования. Получены достаточные условия на ковариационную функцию случайного шума, при которых ОНК параметров синусоидальной модели является сильно состоятельной.

Выводы. Полученные результаты дают возможность их обобщения на модели, в которых функция регрессии является суммой нескольких двупараметричных гармонических колебаний. Кроме того, свойство состоятельности ОНК позволит доказать асимптотическую нормальность этих оценок в следующих работах.

Ключевые слова: текстурированная поверхность; синусоидальная модель; однородное и изотропное случайное поле; ковариационная функция; медленно меняющаяся функция; оценка наименьших квадратов; состоятельность.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
31 травня 2017 року