УДК 517.58/.5892
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.62211

Н.О. Вірченко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАММА-ФУНКЦІЙ

Background. The article is dedicated to studies of the main properties of new generalized gamma-functions, generalized incomplete gamma-functions, generalized digamma-functions for their best applications in applied sciences, for calculations of integrals which are absent in scientific literature.
Objective. Introduction and study of the basic properties of the new generalized gamma-functions, generalized incomplete gamma-functions, generalized digamma-functions and their applications.
Methods. We apply the following methods: the methods of the theory of functions of the real variable, the theory of the special functions, the theory of the mathematical physics, the methods of applied analysis.
Results. Some new forms of generalized gamma-functions, incomplete gamma-functions, digamma-functions are introduced. The main properties of these generalized special functions are explored. Examples of application of new generalized gamma-functions are given.
Conclusions. With the help of the *r*-generalized confluent hypergeometric functions the new generalization of gamma-functions, incomplete gamma-functions, digamma-functions are introduced. The main properties of the new generalized special functions are explored, examples of application of these functions are given.
Keywords: generalized gamma-functions; incomplete gamma-functions; digamma-functions.

Вступ

До найпростіших і найважливіших спеціальних функцій належить гамма-функція, знання властивостей якої є необхідною умовою для дослідження, застосування інших спеціальних функцій. Стаття присвячена вивченню основних властивостей нових узагальнень гамма-функцій.

Гамма-функція вперше була запроваджена у 1729 р. Л. Ейлером, який і заклав основи її теорії. Далі видатні математики А.М. Лежандр, К.Ф. Гаус сприяли викладу теорії гамма-функції з єдиної точки зору, ширшому її застосуванню. Позначення $\Gamma(\alpha)$ було запроваджено в науку А.М. Лежандром у 1809 р.:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

У зв'язку з ширшим використанням теорії спеціальних функцій у математичній фізиці, механіці суцільного середовища, теорії ймовірностей, астрофізиці, у квантовій механіці, квантовій оптиці, теорії дифракції, в аеродинаміці, у теорії надійності, теорії кодування, у біомедицині тощо інтерес до теорії спеціальних функцій, зокрема до гамма-функцій, значно посилюється [1—11].

У [9] подано гамма-функцію $\Gamma_m(u,\upsilon)$, що застосовується в теорії дифракції:

$$\Gamma_m(u,\upsilon)=\int_0^\infty \frac{t^{u-1}e^{-t}}{(t+\upsilon)}dt.$$

Трохи пізніше [8] дано таке узагальнення функції $\Gamma_m(u,\upsilon)$:

$$D\begin{pmatrix} a,b;c,p \\ u,\upsilon; \end{pmatrix}=\upsilon^{-a}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\,{}_2F_1\left(a,b;c;-\frac{t}{\upsilon}\right)dt,$$

де a, b, c, p — комплексні числа $c\neq 0$, $\operatorname{Re}(p)>0$, ${}_2F_1(z)$ — класична гіпергеометрична функція [10].

У [11] розглянуто нове узагальнення гамма-функції:

$$\Gamma\begin{pmatrix} a,b;c; & \\ & p,\omega,\mu \\ u,\upsilon; & \end{pmatrix}=$$

$$=\upsilon^{-a}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}\,{}_2R_1\left(a,b;c;\omega,\mu;-\frac{t}{\upsilon}\right)dt,$$

де ${}_2R_1(\ldots)$ — частинний випадок функції Райта [12]:

$${}_2R_1^{\omega,\mu}(z)={}_2R_1(a,b;c;\omega,\mu;z)=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma\left(b+\frac{\omega}{\mu}n\right)}{\Gamma\left(c+\frac{\omega}{\mu}n\right)}\cdot\frac{z^n}{n!}.$$

У цій же роботі [11] запроваджено узагальнені неповні гамма-функції.

Постановка задачі

Мета роботи — запровадження нових узагальнень гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій, дослідження основних властивостей цих нових узагальнених функцій.

Основні результати

Запровадимо нове узагальнення гамма-функції у вигляді

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{(\alpha)} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt, \qquad (1)$$

де $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $(\tau,\beta) \subset \mathrm{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\tau-\beta > 1$, $\delta \le 1$, $\omega > 0$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — r-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [11]:

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\\ (c,\beta);\end{matrix}\middle| z t^{\tau}\right]dt, \qquad (2)$$

де ${}_1\Psi_1[\ldots]$ — функція Фокса–Райта [12], $\mathrm{B}(a,c-a)$ — бета-функція [10].

Справедливі такі результати.

Лема 1 (*про зображення функції* ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta} \times$ $\times(a;c;z)$ *рядом*). Якщо $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\tau-\beta < 1$, то виконується рівність

$$ {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Д о в е д е н н я виконується безпосередньою перевіркою за допомогою (2).

Лема 2 (*про інтегральні зображення функції* ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{(\alpha)}$). За умов існування функції ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{(\alpha)}$ справедливі такі інтегральні зображення для цієї функції:

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r) =$$

$$= s^{\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-(st)^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{(st)^{\delta}}\right)dt, \qquad (3)$$

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha;\delta,\omega;r) =$$

$$= 2\int_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-x^{2\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{x^{2\delta}}\right)dx, \qquad (4)$$

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta} = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-(\sqrt{r}u)^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{1-\frac{\delta}{2}}}{u^{\delta}}\right)du,$$

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta} = r^{\frac{\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha x - (\sqrt{r}e^{x})^{\omega})\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{1-\frac{\delta}{2}}}{e^{x\delta}}\right)dx.$$

Лема 3 (*про зображення функції* ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}$ *рядом*). Якщо виконуються умови $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$, $\tau \in R$, $r > 0$, $\omega > 0$, $a + n\tau \ne 0, -1, -2, \ldots$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\beta \in R$, $\beta > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\delta \ge 1$, то справедлива формула

$$ {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{(\alpha)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{r})^n}{n!} \frac{\Gamma(a+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \Gamma\left(\frac{\alpha - n\delta}{\omega}\right). \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. Функцію ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ (2) підставимо у формулу для ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{\alpha}$ (1), далі виконуємо підстановку $x = t^{\omega}$ та після перетворень отримаємо (5), де $\Gamma\left(\frac{\alpha - n\delta}{\omega}\right)$ — класична гамма-функція [10].

Теорема 1. Формула

$$\mathcal{M}\{f'(t);\alpha\} = -(\alpha-1)\,\mathrm{M}\{f(\mathrm{t});\alpha-1\}, \qquad (6)$$

де $\mathcal{M}\{\ldots\}$ — інтегральне перетворення Мелліна, для функції ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{\alpha}$ (1) матиме вигляд

$$\alpha\, {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}_{(\alpha)} = \omega\, {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha+\omega-1) - \mathrm{A}r\,\delta\, {}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha-\delta-1), \qquad (7)$$

де

$$A = \frac{\Gamma(\mathrm{c})}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+\tau)}{\Gamma(\mathrm{c}+\beta)}.$$

Д о в е д е н н я. Формулу (6) легко отримати за допомогою інтегрування частинами $(u = t^{\alpha-1}, d\upsilon = f'(t)dt)$. Формулу (7) отримуємо також за допомогою інтегрування частинами (з використанням (6)):

$$u = e^{-t^{\omega}},\ d\upsilon = t^{\alpha-1}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)dt,$$

$$f'(\mathrm{t}) = -\omega\, \mathrm{t}^{\omega-1} e^{-t^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta} +$$

$$+ Ar\delta t^{-\delta-1} e^{-t^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a+1;c+1;-\frac{r}{t^{\delta}}\right).$$

Теорема 2. Так звана формула відбиття для узагальненої гамма-функції ${}^{r}\widetilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha)$ має вигляд

$$ {}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) = -r^{\alpha}\, {}^{r}\tilde{\tilde{\Gamma}}^{\tau,\beta}(-\alpha). \qquad (8)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $t = r\gamma^{-1}$ в (1):

$$ {}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) = -r^{\alpha}\int_0^{\infty} \gamma^{-\alpha+1-2} e^{-\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{1-\delta}}{\gamma^{-\delta}}\right)d\gamma = $$

$$ = -r^{\alpha}\int_0^{\infty} \gamma^{-\alpha-1} e^{-\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r^{1-\delta}}{\gamma^{-\delta}}\right)d\gamma,$$

звідки маємо (8), де

$$ {}^{r}\tilde{\tilde{\Gamma}}^{\tau,\beta} = \int_0^{\infty} \gamma^{-\alpha-1} e^{-(r\gamma^{-1})^{\omega}}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(\frac{r}{\gamma}\right)^{-\delta}\right)d\gamma.$$

Примітка. Зображення

$$ {}^{ar}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha) = a^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-at}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{(at)^{\delta}}\right)dt,$$

де $|a|+|r| \neq 0;\ r = 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0,$ корисне при обчисленні деяких інтегральних перетворень Мелліна, Лапласа.

Теорема 3 (*формула добутку*). За умов існування узагальнених гамма-функцій ${}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha)$, ${}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\gamma)$ справедлива формула

$$ {}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\alpha)\, {}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau,\beta}(\gamma) = $$

$$ = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{2\alpha-1} y^{2\gamma-1} \exp\{-(x^2+y^2)\}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta} \times $$

$$ \times \left(a;c;-\frac{r}{x^{2\delta}}\right) {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{y^{2\delta}}\right)dxdy. \qquad (9)$$

Д о в е д е н н я легко здійснюється за допомогою перемноження двох інтегралів вигляду (4) та переходу до полярних координат.

Наслідок. Поклавши в (9) $r = 0$, одержимо формулу Ейлера:

$$ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta).$$

Узагальнені неповні гамма-функції

Узагальнені неповні гамма-функції запровадимо у вигляді

$$ \tilde{\gamma}(\alpha,x;r) = \int_0^{x} t^{\alpha-1} e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt, \qquad (10)$$

$$ \tilde{\Gamma}(\alpha,x;r) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt,$$

де α, x — комплексні параметри, r — комплексна змінна. При $r = 0$ маємо класичні неповні гамма-функції $\gamma(\alpha,x)$, $\Gamma(\alpha,x)$ [10].

У [3] розглянуто густину ймовірності

$$ f(t) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\exp(-\sqrt{\alpha}t - \sqrt{\beta}t^{-2})^2$$

$$ (\alpha > 0,\ \beta > 0,\ t > 0). \qquad (11)$$

Важливо зазначити, що функцію $f(t)$ (див. (11)) можна виразити через узагальнену неповну гамма-функцію:

$$ F(x) = 1 - \frac{e^{2\sqrt{\alpha\beta}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\alpha x^2;\alpha\beta\right),$$

а трипараметричну густину ймовірності можна подати у вигляді

$$ g(t) = Ct^{\alpha-1}\exp(-\alpha t)\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)$$

$$ (\alpha > 0,\ r > 0,\ t > 0),$$

$$ C^{-1} = 2\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{K}_{\alpha}(2\sqrt{ar}),$$

де $\mathrm{K}_{\alpha}(...)$ — функція Макдональда.

Підкреслимо основну властивість узагальнених неповних гамма-функцій:

$$ \tilde{\gamma}(\alpha,x;r) + \tilde{\Gamma}(\alpha,x;r) = \tilde{\Gamma}(\alpha) \quad (\mathrm{Re}(r) \geq 0). \qquad (12)$$

Теорема 4 (*про зв'язок функції* ${}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)$ *з функцією Макдональда*). За умов $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0, r > 0, \tau > 0$ виконується рівність

$$ {}^{r}\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r) = \frac{2r^{\frac{\alpha}{2}}}{\mathrm{B}(a,c-a)} \times $$

$$ \times \int_0^1 t^{a+\frac{\alpha\tau}{2}-1}(1-t)^{c-a-1}\mathrm{K}_{\alpha}(2\sqrt{rt^{\tau}})dt, \qquad (13)$$

де $\mathrm{K}_{\alpha}(...)$ — функція Макдональда.

Д о в е д е н н я. Використавши формули

$$ {}^{\alpha}\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, {}_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt,$$

$${}_1\Phi_1^{\tau}(\alpha;c;z)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{c-a-1}e^{zt^{\tau}}dt,$$

матимемо:

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}e^{-\frac{r}{t}u^{\tau}}du=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t\,\frac{ru^{\tau}}{t}}dt.$$

Застосуємо формулу 3.471 (3) [10]:

$$\int_0^{\infty}x^{\nu-1}e^{-\frac{\beta}{x}-\gamma x}dx=2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}}\mathrm{K}_{\nu}(2\sqrt{\beta\gamma})$$

$$(\mathrm{Re}(\beta)\geq\mathrm{Re}(\gamma)>0).$$

У нашому випадку:

$$\nu=\alpha,\ \beta=ru^{\tau},\ \gamma=1,$$

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t\frac{ru^{\tau}}{t}}=2(ru^{\tau})^{\frac{a}{2}}\mathrm{K}_{\alpha}(2\sqrt{ru^{\tau}})=$$

$$=2r^{\frac{\alpha}{2}}u^{\frac{\alpha\tau}{2}}\mathrm{K}_{\alpha}(2\sqrt{ru^{\tau}}).$$

Отримали (13).

Наслідок. Якщо $\tau=1,\ a=2,\ r=1,$ то одержимо

$${}^r\tilde{\Gamma}^{1}(\alpha;1)=\Gamma(\alpha)\,{}_1F_2(2;1-\alpha,c;1)+$$

$$+\frac{4\Gamma(c)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(2)\Gamma(\alpha+c)}\,{}_1F_1(\alpha+2;1+\alpha,\alpha+c;1),$$

де $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)>-1+\frac{1}{2}|\mathrm{Re}(\nu)|,\ \mathrm{Re}(c-a)>0,\ {}_1F_2$ — гіпергеометрична функція [10].

Теорема 5 (*про інтегральні зображення узагальненої неповної гамма-функції* ${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)$). За умов $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ r\geq 0,\ \tau>0,\ x>0,$ $\mathrm{Re}(\nu)>0$ маємо:

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)=x^{\alpha}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-xt}\,{}^r_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{xt}\right)dt,$$

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-e^{x}+\alpha x)\,{}^r_1\Phi_1^{\tau}(a;c;-re^{-x})dx,$$

$${}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)=\nu^{\alpha}\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}x^{\nu-1}\,{}^r_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;\frac{r}{\nu\ln x}\right)dx.$$

Теорема 6 (*про інтегральні зображення узагальненої неповної гамма-функції* ${}^r\tilde{\gamma}^{\tau}(\alpha,x;r)$). За умов $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ x>0,\ r>0,$ $\mu>0$ справедлива рівність

$${}^r\tilde{\gamma}^{\tau}(\alpha,x;r)=x^{\alpha}\int_0^{\infty}\exp(-xe^{-t}-\alpha t)\,{}^r_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{x}e^{t}\right)dt.$$

Доведення виконується за допомогою підстановки $t=xe^{-\nu}$ у формулу (10).

Як наслідки (із теорем 5, 6) легко отримуємо значення інтегралів, відсутніх у наявній науковій літературі:

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}\,{}^r_1\Phi_1^{\tau}(a;c;-r(xt)^{-1})dt=\frac{1}{x}\,{}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(1;r),$$

$$\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-2xcht}dt=x^{-\alpha}\,{}^r\tilde{\gamma}^{\tau}(\alpha,x;x^2).$$

Перетворення Лапласа. За умов $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(a)>0,\ \tau\in R,\ \tau>0,\ \mathrm{Re}(\delta)>0$ маємо

$$Z\left\{{}^r_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{t^{\delta}}\right)\right\}=\frac{\Gamma(\delta)}{\mathrm{P}}\,{}_2R_1\left(a,\delta;c;-\frac{r}{p^{\delta}}\right),\quad(14)$$

де ${}_2R_1(\ldots)$ — узагальнена гіпергеометрична функція Фокса–Райта [11].

Перетворення Мелліна. Якщо $\mathrm{Re}(\alpha)>0,$ $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \mathrm{Re}(a-\tau s)>0,\ \mathrm{Re}(c-\tau s)>0,$ $\mathrm{Re}(s)>0,\ r>0,\ \tau>0,\ \omega>0,\ \delta\geq 1,$ то справедлива рівність

$$\mathrm{M}\{{}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;\delta,\omega;r)\}\equiv\int_0^{\infty}{}^r\tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;\delta,\omega;r)r^{s-1}dr=$$

$$=\frac{1}{\omega}\frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-s\tau)}\Gamma\left(\frac{\alpha+\delta s}{\omega}\right).\qquad(15)$$

Справедливість формул (14), (15) легко перевіряється за допомогою теореми Фубіні [10], значення інтеграла [10]

$$\Gamma(z)x^{-z}=\int_0^{\infty}e^{-xt}t^{z-1}dt.$$

Із (15) безпосередньо випливають формули

$$\int_0^{\infty}{}^r\tilde{\Gamma}^{r}\left(\alpha;\frac{1}{n},\omega;r\right)r^{s-1}dr=$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-s\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-s\tau)\omega}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\omega}+\frac{s}{n\omega}\right), n \in N,$$

$$\int_0^\infty t^{-\delta s}\, {}_1^r\Phi_1^\tau\left(\alpha; c; -\frac{r}{t^\delta}\right) r^{s-1} dr = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)}.$$

Узагальнена дігамма-функція

Врахувавши інтегральне зображення узагальненої гамма-функції, маємо таке визначення узагальненої дігамма-функції:

$$\widetilde{\Psi}_r(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\{\ln(\tilde{\Gamma}(\alpha))\} = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\{\tilde{\Gamma}(\alpha)\}$$

або

$$\widetilde{\Psi}_r(\alpha) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(\ln t)e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a; c; -\frac{r}{t}\right)dt,$$

де $\mathrm{Re}(r) > 0;\ r = 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$

Теорема 7. За умов $\mathrm{Re}(r) \geq 0; r = 0,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ справедлива рівність

$$\widetilde{\Psi}_r(\alpha) = \int_0^\infty \left\{e^{-x} - (1+x)^{-\alpha}\frac{\tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)}\right\}\frac{dx}{x}. \quad (16)$$

Доведення. Розглянемо подвійний інтеграл

$$J = \int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}\, {}_1^r\Phi_1\left(a; c; -\frac{r}{t}\right)\left\{\frac{e^{-t-x} - e^{-t(1+x)}}{x}\right\}dtdx. \quad (17)$$

Розписуємо на два інтеграли, зауважуємо, що внутрішні інтеграли – це узагальнені гамма-функції.

Отже, маємо

$$J = \int_0^\infty \{e^{-x}\tilde{\Gamma}_r(\alpha) - (1+x)^{-\alpha}\tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha)\}\frac{dx}{x}. \quad (18)$$

А запис подвійного інтеграла (17) по x дає

$$J = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1\left\{\frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}dx\right\}dt =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left(\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\, {}_1^r\Phi_1 dt\right) = \frac{d}{d\alpha}(\tilde{\Gamma}_r(\alpha)). \quad (19)$$

Із (18) і (19) маємо

$$\frac{d}{d\alpha}(\tilde{\Gamma}_r(\alpha)) =$$

$$= \int_0^\infty \{e^{-x}\tilde{\Gamma}_r(\alpha) - (1+x)^{-\alpha}\tilde{\Gamma}_{r(1+x)}(\alpha)\}\frac{dx}{x}, \quad (20)$$

а поділивши обидві частини (20) на $\tilde{\Gamma}_r(\alpha)$, одержимо (16).

Наслідок. Із (16) при $r = 0$ випливає формула Діріхле для класичної дігамма-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^\alpha}\right)\frac{dx}{x}.$$

Теорема 8. Справедлива така рівність для узагальненої дігамма-функції:

$$\widetilde{\Psi}_r(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{\tilde{\Gamma}_{re^t}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)}\frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right)dt, \quad (21)$$

де $\mathrm{Re}(r) \geq 0; r = 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Доведення легко випливає із (16), підстановки $x = e^t - 1$ в другий інтеграл та після відповідних перетворень.

Наслідок. Із (21) при $r = 0$ маємо результат Гаусса для класичної псі-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right)dt,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Теорема 9. Для узагальненої дігамма-функції виконується рівність

$$\widetilde{\Psi}_r(\alpha) = \ln\alpha + \int_0^\infty \left\{\frac{1}{t} - (1-e^{-t})^{-1}\frac{\tilde{\Gamma}_{re^t}(\alpha)}{\tilde{\Gamma}_r(\alpha)}\right\}e^{-\alpha t}dt \quad (22)$$

$$(\mathrm{Re}(r) \geq 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0).$$

Доведення. Додавши та віднявши $\frac{e^{-\alpha t}}{t}$ у першому члені підінтегрального виразу (21) та врахувавши вираз для інтегрального зображення $\ln\alpha$, отримаємо (22).

Наслідок. При $r = 0$ у (22) матимемо формулу Біне для класичної псі-функції [10]:

$$\Psi(\alpha) = \ln\alpha + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-\alpha t}dt,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

Теорема 10 (*інтегральне перетворення Мелліна функції* $\widetilde{\Psi}^\tau(\alpha; r)$). За умов $\mathrm{Re}(a) > 0, \mathrm{Re}(c) > 0, \mathrm{Re}(a-\tau s) > 0, \mathrm{Re}(c-\tau s) > 0, \mathrm{Re}(s) > 0, \mathrm{Re}(a+s) > 0$ справедлива рівність

$$\int_0^\infty \tilde{\Gamma}^\tau(\alpha; r)\widetilde{\Psi}^\tau(\alpha; r)r^{s-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(s)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)}\Psi(\alpha+s), \quad (23)$$

де $\Psi(\alpha+s)$ – класична Ψ-функція.

Д о в е д е н н я. Враховуючи визначення функцій $\tilde{\Gamma}^{\tau}, \tilde{\Psi}^{\tau}$, можливість перестановки порядку інтегрування (завдяки рівномірній збіжності відповідних інтегралів), маємо

$$\int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)\widetilde{\Psi}^{\tau}(\alpha;r)r^{s-1}dr =$$

$$= \int_0^{\infty} r^{s-1}dr \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(\ln t)e^{-t}\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(a;c;-\frac{r}{t}\right)dt =$$

$$= A\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(\ln t)e^{-t}dt\int_0^{\infty} r^{s-1}dr\int_0^{1} \omega^{a-1}(1-\omega)^{c-a-1}e^{-\frac{r}{t}\omega^{\tau}}d\omega =$$

$$= \frac{\Gamma(s)\Gamma(c)\Gamma(a-\tau s)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau s)}\Psi(\alpha+s),$$

тут враховано

$$\int_0^{\infty} r^{s-1}e^{-\frac{r}{t}\omega^{\tau}}dr = \omega^{-\tau s}t^{s}\Gamma(s),$$

$$A = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)},\quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Наслідок. При $s = 1$ (23) матимемо

$$\int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}^{\tau}(\alpha;r)\widetilde{\Psi}^{\tau}(\alpha;r)\,r^{s-1}dr = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-\tau)}{\Gamma(a)\Gamma(c-\tau)}\Psi(\alpha+1).$$

Висновки

У роботі подано нові узагальнення гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій. За допомогою *r*-узагальнених конфлюентних гіпергеометричних функцій вивчено їх основні властивості (різні інтегральні зображення, диференціальні співвідношення, інтегральні перетворення Мелліна, Лапласа), дано і приклади застосування нових узагальнених гамма-функцій. Для подальшого застосування нових узагальнень гамма-функцій важливими є формула зв'язку з функцією Макдональда та зображення узагальненої гамма-функції у вигляді ряду.

Одержані результати є вагомими та перспективним, оскільки відкривають можливості для ширшого використання гамма-функцій у теорії спеціальних функцій, у теорії ймовірностей, у математичній фізиці. Надалі планується застосувати узагальнення гамма-функцій у прикладних науках, до обчислення нових інтегралів, відсутніх у науковій літературі, до розв'язання нових задач теорії інтегральних рівнянь тощо.

Список літератури

1. *Alzer H.* Some inequalities for the incomplete gamma function // Math. Comp. – 1997. – **66**. – P. 771–778.
2. *Boudjelkha M., Chaudhry M.A.* Asymptotic expansion of the generalized incomplete gamma functions with application to heat conduction problems // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – **248**. – P. 509–519.
3. *Chaudhry M.A., Zubair S.M.* Generalized incomplete gamma function with application // J. Comp. Appl. Math. – 1994. – **55**. – P. 99–124.
4. *Miller A.R.* Reduction of a generalized incomplete gamma function, related Kampe de Feriet functions, and incomplete Weber integrals // Rocky Mountain J. Math. – 2000. – **30**, № 2. – P. 703–714.
5. *Paris R.B., Wood A.D.* Exponentially – improved asymptotic for the gamma function // J. Comp. Appl. Math. – 1992. – **41**. – P. 135–143.
6. *Prym F.E.* Zur Theorie der Gamma Function // J. Reine Angew. Math. – 1877. – **82**. – P. 165–172.
7. *Tricomi F.G., Erdelyi A.* The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions // Pacific J. Math. – 1951. – **1**. – P. 133–142.
8. *Zubair S.M., Chaudhry M.A.* Temperature solutions due to gamma – type heat sources in a finite medium // ASME – HTD. – 1992. – **207**. – P. 63–68.
9. *Kobayashi K.* On generalized gamma functions occurring in diffraction theory // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – **60**. – P. 1501–1512.
10. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. Vol. 1. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. – 296 p.
11. *Virchenko N.O.* On some generalizations of gamma functions // Доп. АН України. – 1999. – № 10. – С. 39–44.
12. *Wright E.M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. – 1993. – **8**. – P. 71–79.

References

1. H. Alzer, "Some inequalities for the incomplete gamma function", *Math. Comp.*, vol. 66, pp. 771–778, 1997.
2. M. Boudjelkha and M.A. Chaudhry, "Asymptotic expansion of the generalized in complete gamma functions with application to heat conduction problems", *J. of Math. Analysis and Applications*, vol. 248, pp. 509–519, 2000.

3. M.A. Chaudhry and S.M. Zubair “Generalized incomplete gamma function with application”, *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 55, pp. 99–124, 1994.
4. A.R. Miller, “Reduction of a generalized incomplete gamma function, related Kampe de Feriet functions, and incomplete Weber integrals”, *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 30, no. 2, pp. 703–714, 2000.
5. R.B. Paris and A.D. Wood, “Exponentially – improved asymptotics for the gamma function”, *J. Comp. Appl. Math.*, vol. 41, pp. 135–143, 1992.
6. F.E. Prym, “Zur Theorie der Gamma Function”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 82, pp. 165–172, 1877.
7. F.G. Tricomi and A. Erdelyi, “The asymptotic expansion of aratio of gamma functions”, *Pacific J. Math*, vol. 1, pp. 133–142, 1951.
8. S.M. Zubair and M.A. Chaudhry, “Temperature solutions due to gamma – type heat sources in a finite medium”, *ASME – HTD*, vol. 207, pp. 63–68, 1992.
9. K. Kobayashi, “On generalized gamma functions occurring in diffraction theory”, *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 60, pp. 1501–1512, 1991.
10. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953, 296 p.
11. N.O. Virchenko, “On some generalizations of gamma functions”, *Dopovidi AN Ukrainy*, no. 10, pp. 39–44, 1999.
12. E.M. Wright, “On the coefficient of power series having exponential singularities”, *J. London Math. Soc.*, vol. 8, pp. 71–79, 1933.

Н.О. Вірченко

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАММА-ФУНКЦІЙ

Проблематика. Стаття присвячена вивченню основних властивостей нових узагальнених гамма-функцій, узагальнених неповних гамма-функцій, узагальнених дігамма-функцій для їх кращого застосування у прикладних науках, для обчислення інтегралів, відсутніх у науковій літературі.

Мета дослідження. Запровадження і дослідження основних властивостей нових узагальнених гамма-функцій, узагальнених неповних гамма-функцій, узагальнених дігамма-функцій та їх застосування.

Методика реалізації. Використано такі методи: методи теорії функцій дійсної змінної, теорії спеціальних функцій, теорії математичної фізики, методи прикладного аналізу.

Результати дослідження. Запроваджено нові форми узагальнених гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій. Досліджено основні властивості цих узагальнених спеціальних функцій, дано приклади застосування нових узагальнених гамма-функцій.

Висновки. За допомогою *r*-узагальнених конфлюентних гіпергеометричних функцій запроваджено нове узагальнення гамма-функцій, неповних гамма-функцій, дігамма-функцій.

Ключові слова: узагальнені гамма-функції; неповні гамма-функції; дігамма-функції.

Н.А. Вирченко

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ГАММА-ФУНКЦИЙ

Проблематика. Статья посвящена изучению основных свойств новых обобщенных гамма-функций, обобщенных неполных гамма-функций, обобщенных дигамма-функций для их лучшего применения в прикладных науках, для вычисления интегралов, отсутствующих в научной литературе.

Цель исследования. Введение и исследование основных свойств новых обобщенных гамма-функций, обобщенных неполных гамма-функций, обобщенных дигамма-функций и их применения.

Методика реализации. Применены следующие методы: методы теории функции действительного переменного, теории специальных функций, теории математической физики, методы прикладного анализа.

Результаты исследования. Введены новые формы обобщенных гамма-функций, неполных гамма-функций, дигамма-функций. Исследованы основные свойства этих обобщенных специальных функций, приведены примеры применения новых обобщенных гамма-функций.

Выводы. При помощи *r*-обобщенных конфлюэнтных гипергеометрических функций введены новые обобщения гамма-функций, неполных гамма-функций, дигамма-функций.

Ключевые слова: обобщенные гамма-функции; неполные гамма-функции; дигамма-функции.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
18 лютого 2016 року