УДК 517.518.456 + 519.651

В.П. Денисюк
Національний авіаційний університет, Київ, Україна

МЕТОД $\sigma_k(r,\alpha)$-МНОЖНИКІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є

Background. The method of Poisson-Abel type of summation of Fourier series, namely, the method of summation with $\sigma_k(r,\alpha)$-factors is considered in this paper.

Objective. Investigation of method of summation of Fourier series with $\sigma_k(r,\alpha)$-factors.

Methods. We apply the analysis of Poisson-Abel method of summation of such series for investigation of method of summation of Fourier series with $\sigma_k(r,\alpha)$-factors.

Results. It is proved in this paper that application of method of summation with $\sigma_k(r,\alpha)$-factors of Fourier series of periodical function $f(t)$ derives to the convolution of this function with kernels $De(r,\alpha,t)$; if the parameter r is integer, these kernels become polynomial normalized basic B-splines of order $r-1$ ($r=1,2,\ldots$). Also it is proved that for $\alpha\to 0$ the method of summation with $\sigma_k(r,\alpha)$-multipliers is F-effective.

Conclusions. We prove that kernels $De(r,\alpha,t)$ may be considered as trigonometric representation of normalized basic B-splines of order $r-1$ ($r=1,2,\ldots$) and the factors $\sigma_k(r,\alpha)$ are Fourier coefficients of these splines. Other types of finite functions with given properties also may be used as kernels $De(r,\alpha,t)$; factors of summation for these kernels are the Fourier coefficients of these kernels. Method of summation of trigonometric series with $\sigma_k(r,\alpha)$-factors may be applied for summation of trigonometric divergent series with coefficients a_k, b_k which have the order of increasing $O(k^{\beta})$, $-1<\beta<\infty$. One can impose the needed properties of smoothness to “generalized” sums of these series.

Keywords: divergent series; linear methods of summation; Fourier series; Poisson–Abel method of summation; Poisson–Abel kernel; normalized basic B-splines.

Вступ

Нехай періодичній з періодом 2π функції $f(t)$, абсолютно інтегровній на проміжку $[-\pi,\pi]$, поставлено у відповідність її ряд Фур'є:

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kt+b_k\sin k\alpha]. \qquad (1)$$

У багатьох випадках такий ряд не збігається рівномірно. Для забезпечення рівномірної збіжності такого ряду часто застосовують лінійні методи підсумовування рядів. Серед них ми розглянемо деякі методи підсумовування типу Пуассона–Абеля. Як відомо [1], основна ідея методів типу Пуассона–Абеля підсумовування ряду (1) полягає в тому, що всі члени ряду одночасно домножуються на множники певного типу; інакше кажучи, ряду (1) ставлять у відповідність ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kt+b_k\sin k\alpha]\to$$
$$\to\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)[a_k\cos kt+b_k\sin k\alpha], \qquad (2)$$

де $\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $(k=1,2,\ldots)$ – деякі множники, що залежать від n $(n=1,2,\ldots)$ параметрів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$; часто такі множники називають множниками збіжності. Відповідно, функції $f(t)$ ставлять у відповідність функцію $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,t)$, де

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,t)\sim\frac{a_0}{2}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)[a_k\cos kt+b_k\sin k\alpha]. \qquad (3)$$

Залежно від типу множників $\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ розрізняють конкретні методи підсумовування. Ми обмежимось розглядом методу Пуассона–Абеля та методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників.

У методі Пуассона–Абеля покладають $\mu_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=r^k$ (тобто $n=1$, $\alpha_1=r$). Згідно з (2) функції $f(t)$ з (1) поставимо у відповідність ряд

$$f(r,t) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k [a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha], \quad 0 < r < 1. \tag{4}$$

Зручним для нас буде подання ряду в (4) через згортку. Для отримання такого подання розглянемо ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(u-t), \; 0 < r < 1, \tag{5}$$

який є рівномірно збіжним, оскільки мажорується геометричною прогресією $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$.

Домножуючи ряд (5) почленно на абсолютно інтегровану функцію $f(t)$, після нескладних перетворень і почленного інтегрування отримуємо

$$f(r,t) \square \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k [a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ku \right\} du, \tag{6}$$

де, як і раніше, коефіцієнти a_k, b_k – коефіцієнти Фур'є функції $f(t)$.

При отриманні (6) ми скористалися тим, що рівномірно збіжний ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(u-t), \, 0 < r < 1,$$

усі члени якого домножені на абсолютно інтегровану функцію, можна інтегрувати почленно.

Враховуючи, що

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos ku = \frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2},$$

остаточно отримуємо

$$f(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k [a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) P(r,u)\, du. \tag{7}$$

Цей інтеграл називають інтегралом Пуассона, а ядро $P(r,u)$ інтегрального перетворення

$$P(r,u) = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}$$

називають ядром Пуассона; теоретичне обґрунтування інтеграла Пуассона надав К. Шварц.

Отже, (7) можна подати у вигляді

$$f(r,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k [a_k \cos kt + b_k \sin k\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+t) P(r,u)\, du.$$

Нескладно перевірити, що ядро Пуассона при $r \to 1-0$ утворює δ-подібну послідовність [2]. Із цього випливає така теорема про збіжність.

У точці, де функція $f(t)$ неперервна або, в крайньому разі, має розрив першого роду, ряд Фур'є (1) є сумованим методом Пуассона–Абеля, причому узагальненою сумою ряду є величина $.5[f(t-0)+f(t+0)]$. Зрозуміло, що в точці неперервності сума ряду дорівнює $f(t)$.

Отже, можна зробити висновок про те, що метод підсумовування Пуассона–Абеля є F-ефективним [1].

Одним із недоліків методу Пуассона–Абеля є те, що параметр r не має будь-якої інтерпретації. Це призводить до того, що при застосуванні цього методу розглядають лише граничну функцію $f(1-0,t) = \lim_{r \to 1-0} f(r,t)$. Проте виконання операції граничного переходу в багатьох випадках не завжди доцільне. Тому привертають увагу методи, в яких параметри, що визначають цей метод, можна інтерпретувати тим чи іншим чином. При застосуванні таких методів можна розглядати не лише граничні функції, отримані в результаті граничного переходу по деяких параметрах, а і функції, отримані при фіксованих значеннях цих параметрів. Одним із таких методів є метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками, який і розглядається в роботі.

Постановка задачі

Мета роботи – дослідження методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників підсумовування тригонометричних рядів Фур'є.

Основна частина

У методі підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками покладемо

$$\mu_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sigma_k(r,\alpha),$$

де

$$\sigma_k(r,\alpha)=\left(\frac{\sin k\dfrac{\alpha}{2}}{k\dfrac{\alpha}{2}}\right)^r,\ 0<\alpha<\pi,\ r=1,2,\ldots. \quad (8)$$

Зрозуміло, що в цьому випадку $n=2$, $\alpha_1=\alpha$; $\alpha_2=r$.

Надалі, для скорочення запису формул, будемо використовувати таке позначення:

$$\operatorname{sinc} x=\frac{\sin x}{x}.$$

У цих позначеннях вираз для $\sigma_k(r,\alpha)$ набуває більш простої форми, а саме

$$\sigma_k(r,\alpha)=\left(\operatorname{sinc} k\frac{\alpha}{2}\right)^r.$$

Перш за все зауважимо, що множники $\sigma_k(2,2h)$ були отримані Г. Ріманом при формальному подвійному інтегруванні тригонометричних рядів з подальшим знаходженням узагальненої другої похідної Шварца [3] і застосовувалися для підсумовування тригонометричних рядів з подальшим граничним переходом $h\to 0$.

Множники $\sigma_k(1,\alpha)$ виникають і в результаті застосування методу фантомних функцій [4].

Множники ж типу $\sigma_k\left(1,\dfrac{2\pi}{n+1}\right)$, $k=1, 2,\ldots,n$, було отримано К. Ланцошем при згладжуванні певним чином частинних сум S_n ряду Фур'є [5]; цей множник застосовувався у методах λ-підсумовування. Нарешті, степені таких множників виникають і при обчисленні наближених коефіцієнтів Фур'є методом Філона [6].

Метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками полягає в тому, що ряду (1) ставиться у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(r,\alpha)[a_k\cos kt+b_k\sin k\alpha],\quad r\ge 1, \quad (9)$$

де $\sigma_k(r,\alpha)$ визначається формулою (8).

Зрозуміло, що при $r>1$ ряд (9) збігається рівномірно. Дійсно, оскільки коефіцієнти ряду a_k, b_k при $k\to\infty$ прямують до 0, то вони обмежені в сукупності

$$|a_k|,\ |b_k|<K,\ K=\text{const},$$

і ряд (6) мажорується збіжним рядом $2K\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^r}$; отже, за ознакою Вейєрштрасса, ряд (9) збігається рівномірно.

Як і раніше, нескладно отримати вираз

$$f(r,\alpha,t)=\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}f(u+t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(r,\alpha)\cos ku\right\}du. \quad (10)$$

Позначимо

$$De(r,\alpha,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(r,h)\cos k(t). \quad (11)$$

Ядро $De(r,\alpha,t)$ будемо називати De-ядром r-го порядку. Розглянемо ці ядра детальніше, зробивши при цьому таке зауваження.

Хоча ми і не можемо строго обґрунтувати подання (11) при $r=1$, почнемо все ж таки розгляд ядер $De(r,\alpha,t)$ саме з цього випадку.

Насамперед легко бачити, що ряд, який визначає ядро $De(1,\alpha,t)$, є збіжним (але не рівномірно збіжним) за ознакою Діріхле. Знайдемо суму цього ряду:

$$De(1,\alpha,t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{sinc} k\frac{\alpha}{2}\right)\cos kt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\ k\left(t+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{k}-\frac{1}{\alpha}\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin\ k\left(t-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{k}\right].$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$De(1,\alpha,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}, & |t|<\dfrac{\alpha}{2},\\ 0, & \dfrac{\alpha}{2}<|t|\le\pi.\end{cases}$$

Отже, ядро $De(1,\alpha,t)$ є фінітною розривною функцією.

Розглянемо тепер ядро $De(2,\alpha,t)$. Безпосередньою перевіркою нескладно пересвідчитись, що це ядро можна подати у вигляді

$$De(2,\alpha,t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{sinc} k\frac{\alpha}{2}\right)^{2}\cos kt\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha-|t|}{\alpha^{2}}, & |t|\le\alpha,\\ 0, & \alpha<|t|\le\pi.\end{cases}$$

Зрозуміло, що тригонометричний ряд, який визначає це ядро, збігається рівномірно.

Як і раніше, із властивостей ядра випливає, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} De(2,\alpha,t)\,dt=1.$$

Розглянемо тепер питання про подання ядра $De(r,\alpha,t)$, $r=3, 4, ...,$ у явному вигляді. Безпосередньою перевіркою нескладно переконатися, що ядро $De(r,\alpha,t)$ з точністю до сталого множника α збігається з періодично продовженими поліноміальними нормалізованими B-сплайнами порядку $r-1$ $(r=1,2,\,...)$ при $\alpha=h,$ побудованими на рівномірних сітках з кроком h, які розглядались у працях [7, 8]. Позначивши такі сплайни $B_{r-1}(\alpha,t)$, отримаємо

$$\alpha De(r,\alpha,t)=B_{r-1}(\alpha,t)$$

або

$$\frac{1}{\alpha}B_{r-1}(\alpha,t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\operatorname{sinc}\frac{k\alpha}{2}\right)^{r}\cos kt\right),\quad(12)$$

де сплайн $B_{r-1}(\alpha,t)$ будується на рівномірній сітці з кроком α, а центри симетрії обох функцій є узгодженими. Зауважимо, що при $r=$ $=1,\ldots,5$ можна скористатися явною формою подання B-сплайнів [6].

Враховуючи властивості B-сплайнів, (12) можна подати у вигляді

$$B_r(\alpha,t)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}B_{r-1}(\alpha,t-u)B_0(\alpha,u)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\frac{k\alpha}{2}}\right)^{r}\cos k(t-u)\right)B_0(\alpha,u)du=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\frac{k\alpha}{2}}\right)^{r+1}\cos kt\right).\qquad(13)$$

Формула (13) заслуговує, на нашу думку, на окрему увагу, оскільки вона встановлює зв'язок між інтегралами типу згортки для B-сплайнів та їх поданням у вигляді ряду Фур'є.

Отже, враховуючи (7), функцію $f(r,\alpha,t)$ можна подати у вигляді

$$f(r,\alpha,t)=\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+u)B_{r-1}(\alpha,\mathrm{u})\;du,\; r=1,2,\ldots$$

Нескладно переконатись у тому, що ядра $De(r,\alpha,t)$ при кожному фіксованому $r=1,$ $2,\ldots,$ утворюють δ-подібну послідовність при $\alpha\to0.$ Дійсно,

а) $De(r,\alpha,t)=\dfrac{1}{\alpha}B_{r-1}(\alpha,t)\ge0;$

б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}De(r(\alpha,t)\;dx=\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}B_{r-1}(\alpha,t)\;dx=1;$

в) для будь-якого ε, $0<\varepsilon<a$, величина

$$M(\varepsilon,\alpha)=\sup_{t\ge\varepsilon}\;De(r,\alpha,t)=\frac{1}{\alpha}B_{r-1}(\alpha,t)$$

при $\alpha\to0$ прямує до 0.

З цього випливає

$$\lim_{\alpha\to0}f(r,\alpha,t)=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+u)B_{r-1}(\alpha,\mathrm{u})\;du=$$

$$=\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)].$$

Зокрема, в точці неперервності ця границя дорівнює $f(t)$.

Отже, як і раніше, можна зробити висновок про те, що метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками є F-ефективним [1].

Зрозуміло, що параметри r та α, що входять до подання $\sigma_k(r,\alpha)$-множників, припускають просту інтерпретацію. Так, зокрема, параметр r визначає диференціальні властивості ядра $De(r,\alpha,t)$, а параметр α для функцій, що мають точки розривів першого роду типу стрибка, визначає величину околів цих точок, у яких відбувається згладжування цих розривів.

Висновки

Як відомо, в багатьох випадках тригонометричні ряди Фур'є не збігаються рівномірно. Для забезпечення рівномірної збіжності такого ряду часто застосовують лінійні методи підсумовування рядів. Серед цих методів підсумовування ми розглядаємо лише методи підсумовування типу Пуассона–Абеля. Основна ідея методів типу Пуассона–Абеля підсумовування тригонометричних рядів Фур'є полягає в тому, що всі члени ряду домножуються одночасно на деякі множники, що є функціями номера та залежать від деяких параметрів. Типовим представником методів такого типу є метод підсумовування Пуассона–Абеля, який призводить до ядра Пуассона інтегрального перетворення.

У роботі розглядається і досліджується метод підсумовування тригонометричних рядів $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками. Показано, що застосування цього методу призводить до ядер $De(r,\alpha,t)$ інтегрального перетворення. Також показано, що при цілих значеннях параметра r ці ядра являють собою поліноміальні нормалізовані базисні B-сплайни відповідних порядків.

Встановлено, що сума ряду Фур'є абсолютно інтегрованої функції $f(t)$ із введеними в нього множниками збіжності $\gamma_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, у разі його рівномірної збіжності дорівнює згортці цієї функції з ядром $De(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, причому це ядро визначається рівністю

$$De(t,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \\ = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\cos kt\right).$$

Так, зокрема, показано, що тригонометричні ряди Фур'є абсолютно інтегрованої функції $f(t)$, що підсумовуються методом $\sigma_k(r,\alpha)$ множників, збігаються до згортки цієї функції з поліноміальними B-сплайнами. Встановлення такого зв'язку відкриває широкі можливості для досліджень класів поліноміальних і тригонометричних наближень у сукупності.

Множники $\sigma_k(r,\alpha)$ є коефіцієнтами Фур'є нормалізованих базисних B-сплайнів порядку $r-1$, $r=1,2,\ldots$, а ядра $De(r,\alpha,t)$ можна розглядати як тригонометричне подання таких сплайнів. Оскільки B-сплайни утворюють поліноміальний базис у просторах C^r, то можна стверджувати, що ядра $De(r,\alpha,t)$ також утворюють базис у цих просторах. З цього факту випливає можливість побудови тригонометричних аналогів простих поліноміальних сплайнів через лінійні комбінації цих ядер.

Привертає увагу і формула (13), яка встановлює зв'язок між інтегралами типу згортки для B-сплайнів та їх поданням у вигляді ряду Фур'є.

Нарешті, метод підсумовування тригонометричних рядів $\sigma_k(r,\alpha)$ множниками привертає увагу ще й тому, що він є узагальненням результатів, які наводяться в [1, 3, 9]. Так, А. Зигмунд і Г. Харді наводять подання ядра $De(2,\alpha,t)$ через множники $\sigma_k(2,\alpha)$, а Н. Барі – подання ядра $De(3,\alpha,t)$ через множники $\sigma_k(3,\alpha)$. Проте ці автори не пішли далі по шляху узагальнення цих результатів.

Відкривається можливість використання в ролі ядер $De(r,\alpha,t)$ інших типів фінітних функцій з фіксованою гладкістю, зокрема функцій сплайнових типів. Більше того, стає можливим конструювання ядер типу $De(r,\alpha,t)$ із наперед заданими властивостями. Множники ж підсумовування типу $\sigma_k(r,\alpha)$ для таких ядер нескладно отримати як коефіцієнти Фур'є в розкладах цих ядер згідно з (12).

Існують тригонометричні ряди, коефіцієнти яких не прямують до 0 або взагалі зростають. Вимагаючи лише, щоб їх коефіцієнти a_k мали порядок зростання $O(k^{\gamma})$, $\gamma<\infty$, і позначаючи $E[\gamma]+1=\nu$, ми можемо знаходити "узагальнені" суми таких рядів $\sigma_k(r,\alpha)$ методом, покладаючи $r>\nu+2$. Зрозуміло, що такі ряди стають рівномірно збіжними, а їх суми можуть бути диференційованими функціями.

Список літератури

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. – 504 с.
2. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами – М.: Наука, Главред физ.-мат. лит-ры, 1977. – 512 с.
3. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды – М.: Госиздат физ.-мат. лит., 1961. – 936 с.

4. *Денисюк В.П.* Метод покращення збіжності рядів Фур'є та інтерполяційних многочленів по ортогональних функціях // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 31–37.
5. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Госиздат физ.-мат. лит-ры, 1961. – 524 с.
6. *Денисюк В.П.* Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни. – К.: ПАТ "ВІПОЛ", 2015. – 296 с.
7. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
8. *Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2 т. – М.: Мир, 1965.

References

1. G.H. Hardy, *Divergent Series.* Moscow, USSR: Izdatelstvo Inostrannoyi Literatury, 1951, 504 p. (in Russian).
2. V.K. Dziadyk, *Introduction to Theory of Uniform Functions Approximation by Polynomials.* Moscow, USSR: Nauka, 1977, 512 p. (in Russian).
3. N.K. Bari, *Trigonometric Series.* Moscow, USSR: Gosizdat Fiz.-Mat. Literatury, 1961, 936 p. (in Russian).
4. V.P. Denisiuk, "*Method of improving of convergence for fourier series and interpolating polynomial in orthogonal function*", Naukovi Visti NTTU "KPI", no. 4, pp. 31–37, 2013 (in Ukrainian).
5. C. Lanchos, *Applied Analysis.* Moscow, USSR: Gosizdat Fiz.-Mat. Literatury, 1961, 524 p. (in Russian).
6. V.P. Denisiuk, *Fundamental Functions and Trigonometric Splines.* Kyiv, Ukraine: PAT "VIPOL", 2015, 296 p. (in Ukrainian).
7. Yu.S. Zav'yalov *et al.*, *Methods of Spline Functions.* Moscow, USSR: Nauka, 1980, 352 p. (in Russian).
8. C. de Boor, *A Practical Guide to Splines.* Moscow, USSR: Radio i Sviaz, 1985, 304 p. (in Russian).
9. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2 vol. Moscow, USSR: Mir, 1965. (in Russian).

В.П. Денисюк

МЕТОД $\sigma_k(r,\alpha)$-МНОЖНИКІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є

Проблематика. Статтю присвячено дослідженню методу типу Пуассона–Абеля підсумовування рядів Фур'є, а саме методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників підсумовування таких рядів.

Мета дослідження. Дослідження методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників підсумовування рядів Фур'є.

Методика реалізації. Для дослідження методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників підсумовування рядів Фур'є застосовано методику дослідження методу Пуассона–Абеля підсумовування таких рядів.

Результати дослідження. У роботі показано, що застосування методу $\sigma_k(r,\alpha)$-множників підсумовування ряду Фур'є періодичної функції $f(t)$ приводить до згортки цієї функції з ядрами $De(r,\alpha,t)$; при цілих значеннях параметра r ці ядра являють собою поліноміальні нормалізовані базисні B-сплайни порядку $r-1$ ($r=1,2,\ldots$). Також показано, що при $\alpha \to 0$ метод підсумовування $\sigma_k(r,\alpha)$-множниками є F-ефективним.

Висновки. Встановлено, що ядра $De(r,\alpha,t)$ можна розглядати як тригонометричне подання нормалізованих B-сплайнів порядку $r-1$ ($r=1,2,\ldots$), а множники $\sigma_k(r,\alpha)$ є коефіцієнтами Фур'є цих сплайнів. Відкривається можливість використання як ядер $De(r,\alpha,t)$ інших типів фінітних функцій із наперед заданими властивостями. Множники ж підсумовування для таких ядер отримуються як коефіцієнти Фур'є цих ядер. Метод підсумовування тригонометричних рядів $\sigma_k(r,\alpha)$ множниками може бути застосовано для підсумовування тригонометричних розбіжних рядів, коефіцієнти яких a_k, b_k мають порядок зростання $O(k^{\beta})$, $-1<\beta<\infty$. "Узагальненим" сумам таких рядів можна надавати певних властивостей гладкості.

Ключові слова: розбіжні ряди; лінійні методи підсумовування; ряди Фур'є; метод підсумовування Пуассона–Абеля; ядро Пуассона–Абеля; нормалізовані базисні B-сплайни.

В.П. Денисюк

МЕТОД $\sigma_k(r,\alpha)$-МНОЖИТЕЛЕЙ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Проблематика. В статье рассматривается метод типа Пуассона–Абеля суммирования рядов Фурье, а именно метод $\sigma_k(r,\alpha)$-множителей суммирования таких рядов.

Цель исследования. Исследование метода $\sigma_k(r,\alpha)$-множителей суммирования рядов Фурье.

Методика реализации. Для исследования метода $\sigma_k(r,\alpha)$-множителей суммирования рядов Фурье использовалась методика исследования метода Пуассона-Абеля суммирования таких рядов.

Результаты исследования. В работе показано, что применение метода $\sigma_k(r,\alpha)$-множителей суммирования ряда Фурье периодической функции $f(t)$ приводит к свертке этой функции с ядрами $De(r,\alpha,t)$; при целых значениях параметра r эти

ядра являются полиномиальными нормализованными базисными B-сплайнами порядка $r-1$ ($r = 1, 2, ...$). Также показано, что при $\alpha \to 0$ метод суммирования $\sigma_k(r,\alpha)$-множителями является F-эффективным.

Выводы. Показано, что ядра $De(r,\alpha,t)$ можно рассматривать как тригонометрическое представление нормализованных базисных B-сплайнов порядка $r-1$ ($r = 1, 2, ...$), а множители $\sigma_k(r,\alpha)$ являются коэффициентами Фурье этих сплайнов. В качестве ядер $De(r,\alpha,t)$ можно использовать и другие типы финитных функций с наперед заданными свойствами; множители же суммирования для таких ядер являются коэффициентами Фурье этих ядер. Метод суммирования тригонометрических рядов $\sigma_k(r,\alpha)$ множителями может быть использован для суммирования тригонометрических расходящихся рядов, коэффициенты которых a_k, b_k имеют порядок возрастания $O(k^{\beta})$, $-1 < \beta < \infty$. “Обобщенным” суммам таких рядов можно сообщать необходимые свойства гладкости.

Ключевые слова: расходящиеся ряды; линейные методы суммирования; ряды Фурье; метод суммирования Пуассона–Абеля; ядро Пуассона–Абеля; нормализованные базисные B-сплайны.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
8 червня 2015 року