

DOI: 10.20535/1810-0546.2018.6.151759

УДК 519.657

А.М. Євтушенко*, Ю.Д. Щербашин
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ПРОГРАМА СПРОЩЕННЯ ПОЛІНОМІВ ВИСОКОГО СТЕПЕНЯ НА ПРИКЛАДІ СПРОЩЕННЯ ФОРМУЛИ ВІЛЬСОНА

Проблематика. Оскільки багато формул мають вигляд поліномів високих порядків і їх використання призводить до великої кількості обчислень, що уповільнює швидкість отримання результатів, то розглядається технологія спрощення поліномів високого степеня.

Мета дослідження. Метою роботи є отримання технології спрощення поліномів високого степеня на основі застосування методів теорії планування експерименту до формули Вільсона.

Методика реалізації. Для спрощення поліномів високого порядку пропонується поєднання і послідовне застосування методів планування експерименту та найменших квадратів. Для області вхідних значень будується матриця ротатбельного центрального композиційного плану Бокса другого порядку для трьох факторів. До побудованої матриці застосовуємо метод найменших квадратів, за допомогою якого знаходимо коефіцієнти спрощеної формули. Отримана спрощена формула матиме вигляд полінома 2-го степеня.

Результати дослідження. Формула Вільсона, яка має вигляд полінома 4-го степеня, спрощена до вигляду полінома 2-го степеня. Розбивши всю область визначення для формули Вільсона на підобласті та побудувавши для окремої підобласті спрощену формулу, отримали результат, згідно з яким за допомогою спрощеної формули можна розрахувати швидкість звуку майже в 25 разів швидше, ніж з використанням формули Вільсона, при цьому має місце лише незначне відхилення в результатах.

Висновки. При спрощенні поліномів високого степеня зменшення діапазонів вхідних параметрів є визначальним для отримання задовільного відхилення між обчисленими значеннями. Запропонований підхід спрощення формул досить добре спрацював на прикладі формули Вільсона. Його також можна застосувати для спрощення інших формул, які мають вигляд поліномів високого степеня. Одним із варіантів подальшого використання результатів роботи є створення технології, яка б надавала можливість паралельного розрахунку швидкості звуку за отриманими спрощеними формулами для кожної з підобластей, на які розбивається область визначення для формули Вільсона.

Ключові слова: поліном високого степеня; формула Вільсона; метод планування експерименту; метод найменших квадратів; поліном 2-го степеня.

Вступ

Незважаючи на великі досягнення сучасних ІТ-технологій, деякі сфери людської діяльності все ще слабо автоматизовані. Так, ще досі в проектувальних і дослідницьких роботах використовуються багатосторінкові, багатотомні довідники механічних, хімічних, термодинамічних властивостей речовин залежно від температури, тиску та хімічного складу домішок [1]. Виникла потреба накопичувати ці дані в базах даних сучасних комп'ютерів та спростити їх використання, винайшовши формули, що адекватно описують залежність властивості від деяких умов. На сьогодні продовжується вдосконалення рівнянь і методів розрахунку швидкості звуку [2, 3], тому вдалим прикладом такої формули є формула Вільсона [4] – поліном четвертого степеня залежності швидкості звуку в морській воді від температури, гідростатичного тиску та солоності. Формула дійсна

для широкого діапазону вхідних даних і отримана на основі матеріалу гідрографічних таблиць, що діяли на той час. Недоліком формули є велика кількість обчислень, що уповільнює швидкість отримання результатів у online-режимі її використання.

Постановка задачі

Метою роботи є отримання технології спрощення поліномів високого степеня на основі застосування методів теорії планування експерименту до формули Вільсона.

Формула Вільсона

Формула Вільсона має такий вигляд:

$$c(S, T, P) = c_0 + \Delta c_T + \Delta c_S + \Delta c_P + \Delta c_{STP}, \quad (1)$$

$$c_0 = 1449,14, \quad (2)$$

* corresponding author: artemevtusenko238@gmail.com

$t_1 = -4$ °C; “-” – кінцева величина температури t_2 , для всієї області дослідження $t_2 = 30$ °C; “0” – середнє значення температури, що знаходиться за формулою $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

Поле зі значеннями x_2 буде відповідати значенням солоності води. Для цього замість значень “+” та “-” запишемо крайні точки діапазону солоності: “+” – початкова величина солоності s_1 , для всієї області дослідження $s_1 = 0$ ‰; “-” – кінцева величина солоності s_2 , для всієї області дослідження $s_2 = 37$ ‰; “0” – середнє значення солоності, що знаходиться за формулою $s_0 = \frac{s_1 + s_2}{2}$.

Поле зі значеннями x_3 буде відповідати значенням гідростатичного тиску води. Для цього замість значень “+” та “-” запишемо крайні точки діапазону гідростатичного тиску: “+” – початкова величина гідростатичного тиску p_1 , для всієї області дослідження $p_1 = 0,1$ МПа; “-” – кінцева величина гідростатичного тиску

p_2 , для всієї області дослідження $p_2 = 100$ МПа; “0” – середнє значення гідростатичного тиску, що знаходиться за формулою $p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}$.

Для того щоб переписати табл. 1 у новому вигляді, залишилось нормувати величину γ . Оскільки діапазони факторів мають різні величини, то в результаті нормування отримаємо три нові величини для температури: $\gamma_T = 1,682 \cdot (t_2 - t_0)$, солоності: $\gamma_S = 1,682 \cdot (s_2 - s_0)$ та гідростатичного тиску: $\gamma_P = 1,682 \cdot (p_2 - p_0)$.

Тепер можемо записати табл. 2.

У табл. 2 перші вісім рядків – план ПФЕ, наступні 6 рядків – зіркові точки і останній рядок – центр плану.

Метод найменших квадратів

Застосуємо метод найменших квадратів (МНК) [8,9] для апроксимації формули Вільсона поліномом 2-го степеня. Для цього як дискретно задану функцію візьмемо матрицю з табл. 2 (позначимо її літерою A) і вектор зна-

Таблиця 2. Матриця центрального композиційного плану Бокса другого порядку для формули Вільсона

x_0	T	S	P	TS	TP	SP	T^2	S^2	P^2
1	t_1	s_1	p_1	$t_1 s_1$	$t_1 p_1$	$s_1 p_1$	t_1^2	s_1^2	p_1^2
1	t_2	s_1	p_1	$t_2 s_1$	$t_2 p_1$	$s_1 p_1$	t_2^2	s_1^2	p_1^2
1	t_1	s_2	p_1	$t_1 s_2$	$t_1 p_1$	$s_2 p_1$	t_1^2	s_2^2	p_1^2
1	t_2	s_2	p_1	$t_2 s_2$	$t_2 p_1$	$s_2 p_1$	t_2^2	s_2^2	p_1^2
1	t_1	s_1	p_2	$t_1 s_1$	$t_1 p_2$	$s_1 p_2$	t_1^2	s_1^2	p_2^2
1	t_2	s_1	p_2	$t_2 s_1$	$t_2 p_2$	$s_1 p_2$	t_2^2	s_1^2	p_2^2
1	t_1	s_2	p_2	$t_1 s_2$	$t_1 p_2$	$s_2 p_2$	t_1^2	s_2^2	p_2^2
1	t_2	s_2	p_2	$t_2 s_2$	$t_2 p_2$	$s_2 p_2$	t_2^2	s_2^2	p_2^2
1	$t_0 - \gamma_T$	s_0	p_0	$(t_0 - \gamma_T)s_0$	$(t_0 - \gamma_T)p_0$	$s_0 p_0$	$(t_0 - \gamma_T)^2$	s_0^2	p_0^2
1	$t_0 + \gamma_T$	s_0	p_0	$(t_0 + \gamma_T)s_0$	$(t_0 + \gamma_T)p_0$	$s_0 p_0$	$(t_0 + \gamma_T)^2$	s_0^2	p_0^2
1	t_0	$s_0 - \gamma_S$	p_0	$(s_0 - \gamma_S)t_0$	$t_0 p_0$	$(s_0 - \gamma_S)p_0$	t_0^2	$(s_0 - \gamma_S)t_0$	p_0^2
1	t_0	$s_0 + \gamma_S$	p_0	$(s_0 + \gamma_S)t_0$	$t_0 p_0$	$(s_0 + \gamma_S)p_0$	t_0^2	$(s_0 + \gamma_S)^2$	p_0^2
1	t_0	s_0	$p_0 - \gamma_P$	$t_0 s_0$	$(p_0 - \gamma_P)t_0$	$(p_0 - \gamma_P)s_0$	t_0^2	s_0^2	$(p_0 - \gamma_P)^2$
1	t_0	s_0	$p_0 + \gamma_P$	$t_0 s_0$	$(p_0 + \gamma_P)t_0$	$(p_0 + \gamma_P)s_0$	t_0^2	s_0^2	$(p_0 + \gamma_P)^2$
1	t_0	s_0	p_0	$t_0 s_0$	$t_0 p_0$	$s_0 p_0$	t_0^2	s_0^2	p_0^2

чень полінома Вільсона для кожної трійки вхідних параметрів T, S, P із табл. 2 (позначимо цей вектор літерою Y). Утворимо формулу: $A \cdot B = Y$, де B – вектор невідомих коефіцієнтів, який потрібно знайти за допомогою МНК. Цей вектор можна знайти за формулою

$$B = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot Y$$

або за спрощеною формулою

$$B = A^{-1} \cdot Y.$$

У результаті отримуємо вектор коефіцієнтів $B = [b_0, b_1, \dots, b_9]$ та поліном 2-го степеня у вигляді формули

$$c(S, T, P) = b_0 + b_1 T + b_2 S + b_3 P + b_4 TS + b_5 TP + b_6 SP + b_7 T^2 + b_8 S^2 + b_9 P^2. \quad (7)$$

Після отримання полінома (7) апроксимацію формули Вільсона (1)–(6) поліномом 2-го степеня можна вважати завершеною.

Програмна реалізація

З використанням засобів програмного пакета MATLAB версії 7.7.0 (R2008b) створено програмну реалізацію описаного вище алгоритму, за допомогою якої було проведено дослідження похибки між значеннями, обчисленими за допомогою одержаної спрощеної формули та формули Вільсона. Також були проведені дослідження часу, який витрачається на розрахунок за цими двома формулами.

Користувач задає в програмі кінцеві точки діапазонів, для яких буде проводитись апроксимація формули Вільсона, поліномом 2-го порядку. Розіб'ємо кожен із трьох заданих діапазонів на 10 рівних частин і в отриманих таким способом вузлах знайдемо абсолютні значення різниць між одержаним поліномом та формулою Вільсона. Максимальне значення в цьому векторі відхилення будемо вважати максимальним відхиленням.

Спочатку задаємо всю область, на якій визначена формула Вільсона (рис. 1). Одержуємо результат (рис. 2), який показує, що для всієї області цей спосіб спрощення формули не є задовільним.

Крайні точки факторів		
	Початкове значення	Кінцеве значення
Температура T , °C	-4	30
Солоність S , ‰	0	37
Гідростатичний тиск P , МПа	0.1	100

Рис. 1. Задання всієї області, на якій визначена формула Вільсона

З метою зменшення похибки, яка виникає в результаті апроксимації, ми розбиваємо всю область на підобласті і задаємо в програмі окремо крайні точки потрібної нам підобласті (рис. 3). Також досліджуємо час, який витрачається на обчислення за формулою Вільсона та одержаною формулою.

Одержуємо результат (рис. 4), який показує, що для заданої підобласті максимальне відхилення зменшилось, і, відповідно, одержана формула дає результат, що майже не відрізняється від результату, одержаного за формулою Вільсона. Також зменшився час, що витрачається на розрахунок швидкості звуку.

Дослідження часу проводились для мільйона звернень поспіль до кожної з формул з урахуванням того, що різниця в часі розрахунку швидкості звуку за формулою Вільсона та одержаним поліномом стає явно помітною для мільйона викликів.

Поліном, отриманий в результаті апроксимації		
$c = 1401.2095 + 4.806 \cdot T + 1.3121 \cdot S + 1.723 \cdot P + 0.011187 \cdot T \cdot S + 0.0037742 \cdot T \cdot P + 0.00055024 \cdot S \cdot P + 0.035499 \cdot T^2 + 0.0011752 \cdot S^2 + 0.00026107 \cdot P^2$		
Максимальне відхилення:	3.3935	м/с
<input type="button" value="Побудувати поліном"/>		

Рис. 2. Результати для всієї області

Крайні точки факторів		
	Початкове значення	Кінцеве значення
Температура T , °C	-4	10
Солоність S , ‰	0	12
Гідростатичний тиск P , МПа	0.1	20

Рис. 3. Задання підобласті

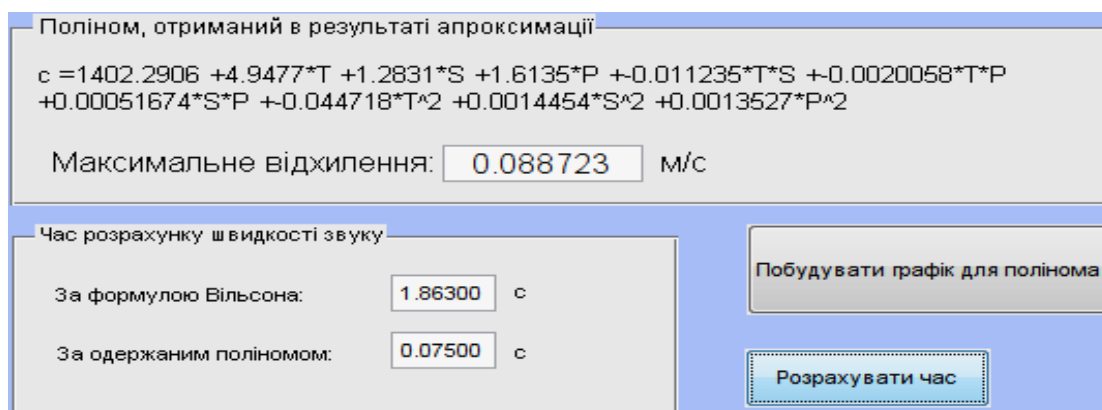


Рис. 4. Результати для заданої підобласті

З рис. 4 можна зробити висновок, що за допомогою одержаного полінома 2-го степеня можна розрахувати швидкість звуку майже в 25 разів швидше, ніж з використанням формули Вільсона, і при цьому отримати майже однакові результати.

Висновки

Здійснено апроксимацію формули Вільсона (полінома 4-го степеня) та спрощення її до вигляду полінома 2-го степеня.

Розбивши всю область визначення на підобласті та розглянувши окрему підобласть, ми одержали задовільне відхилення в обчислених значеннях.

Проведено дослідження часу, який витрачається на розрахунок швидкості звуку за обома формулами, в результаті якого встановлено, що обчислення за спрощеною формулою потребує менших затрат часу.

Одержуючи та використовуючи спрощені емпіричні формули для різних підобластей, можна збільшити ефективність обчислення швидкості звуку. Зокрема, одним із варіантів подальшого використання результатів цієї роботи є створення технології, яка б надавала можливість паралельного розрахунку швидкості звуку за отриманими спрощеними формулами для кожної підобласті.

References

- [1] N.B. Vargaftik, *Handbook on the Thermophysical Properties of Gases and Hydroxides*. Moscow, SU: Nauka, 1972, 721 p.
- [2] V.I. Babiy, *Problems and Prospects of Measuring the Speed of Sound in the Ocean*. Sevastopol, Ukraine: Scientific and Production Center "EKOSI-Hydrofizika", 2009, 142 p.
- [3] C.C. Leroy, "A new equation for the accurate calculation of sound speed in all oceans", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 124, no. 5, pp. 2774–2782, 2008. doi: 10.1121/1.2988296
- [4] W.D. Wilson, "Equation for the speed of sound in sea water", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 32, no. 10, p. 1357, 1960. doi: 10.1121/1.1907913
- [5] Yu.P. Adler, *Introduction to Experiment Planning*. Moscow, SU: Metalurgia, 1968, 155 p.
- [6] V.I. Asaturyan, *The Theory of Experiment Planning*. Moscow, SU: Radio i Sviaz', 1983.
- [7] V.V. Nalimov, *Theory of the Experiment*. Moscow, SU: Nauka, 1971.
- [8] Yu.V. Linnik. *The Method of least Squares and the Fundamentals of the Mathematical-Statistical Theory of Processing Observations*, 2nd ed. Leningrad, SU: Fizmatgiz, 1962.
- [9] L.I. Turchak, *Fundamentals of Numerical Methods*. Moscow, Russia: Fizmatlit, 2005, 304 p.

А.М. Евтушенко, Ю.Д. Щербашин

ПРОГРАММА УПРОЩЕННЯ ПОЛІНОМОВ ВИСОКОЇ СТЕПЕНИ НА ПРИМЕРЕ УПРОЩЕННЯ ФОРМУЛИ ВІЛЬСОНА

Проблематика. Поскольку многие формулы имеют вид полиномов высоких порядков и их использование приводит к большому количеству вычислений, что замедляет скорость получения результатов, то рассматривается технология упрощения полиномов высокой степени.

Цель исследования. Целью работы является получение технологии упрощения полиномов высокой степени на основе применения методов теории планирования эксперимента к формуле Вильсона.

Методика реализации. Для упрощения полиномов высокого порядка предлагается сочетание и последовательное применение методов планирования эксперимента и наименьших квадратов. Для области входных значений строится матрица ротатбельного центрального композиционного плана Бокса второго порядка для трех факторов. К построенной матрице применяется метод наименьших квадратов, с помощью которого находим коэффициенты упрощенной формулы. Полученная упрощенная формула будет иметь вид полинома 2-й степени.

Результаты исследования. Формула Вильсона, которая имеет вид полинома 4-й степени, упрощена до вида полинома 2-й степени. Разбив всю область определения для формулы Вильсона на подобласти и построив для отдельной подобласти упрощенную формулу, получили результат, согласно которому с помощью упрощенной формулы можно рассчитать скорость звука почти в 25 раз быстрее, чем с использованием формулы Вильсона, при этом имеет место только незначительное отклонение в результатах.

Выводы. При упрощении полиномов высокой степени уменьшение диапазонов входных параметров является определяющим для получения удовлетворительного отклонения между вычисленными значениями. Предложенный подход упрощения формул достаточно хорошо сработал на примере формулы Вильсона. Его также можно применить для упрощения других формул, которые имеют вид полиномов высокой степени. Одним из вариантов дальнейшего использования результатов данной работы является создание технологии, которая бы давала возможность параллельного расчета скорости звука по полученным упрощенными формулами для каждой из подобластей, на которые разбивается область определения для формулы Вильсона.

Ключевые слова: полином высокой степени; формула Вильсона; метод планирования эксперимента; метод наименьших квадратов; полином 2-й степени.

A.M. Yevtushenko, Yu.D. Shcherbashin

PROGRAM OF SIMPLIFICATION OF HIGH-LEVEL POLYNOMIAL AT THE EXAMPLE OF SIMPLIFICATION OF WILSON'S FORMULA

Background. Since many formulas have the form of high-level polynomials and their use leads to a large number of computations, which slows down the speed of obtaining results, the technology of simplification of high-level polynomials is considered.

Objective. The aim of the paper is to obtain a technology for the simplification of high-level polynomials based on the application of the theory of experiment planning to the Wilson's formula.

Methods. To simplify high-level polynomials, combination and consistent application of experiment planning and least squares methods are proposed. For the field of input values, matrix of rotatable central composite plan Box of second order for three factors is constructed. To the constructed matrix the least squares method was applied, by which the coefficients of the simplified formula can be found. The resulting simplified formula will have the form of a polynomial of the 2nd degree.

Results. The Wilson's formula, which has the form of a polynomial of degree 4, is simplified to the form of a polynomial of degree 2. Having broken down the entire definition domain for Wilson's formula on the parts and constructed a simplified formula for a particular part, we obtained a result that, using the simplified formula, one can calculate the speed of sound almost 25 times faster than using the Wilson's formula, with only a slight deviation in the results.

Conclusions. When simplifying polynomials of high degree, the reduction of the ranges of input parameters is decisive for obtaining a satisfactory deviation between the calculated values. The proposed approach to simplifying the formulas worked quite well on the example of Wilson's formula. It can also be used to simplify other formulas that have the form of high-level polynomials. One of the options for further use of the results of this work is the creation of a technology that would enable the parallel calculation of the sound speed based on the simplified formulas obtained for each of the parts to which the definition area for the Wilson's formula is divided.

Keywords: high-level polynomial; Wilson's formula; experiment planning method; least squares method; polynomial of the 2nd degree.

Рекомендована Радою
теплоенергетичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
28 вересня 2018 року

Прийнята до публікації
6 грудня 2018 року