

УДК 621.833.16

DOI: 10.20535/1810-0546.2018.1.121166

І.В. Янчевський<sup>1</sup>, П. Комада<sup>2</sup>, Н.В. Стельмах<sup>1\*</sup>, Д.М. Литвиненко<sup>1</sup><sup>1</sup>КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна<sup>2</sup>Інститут електроніки та інформаційних технологій Люблінського технологічного університету, Люблін, Польща

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ КРИВОШИПНО-ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА

**Проблематика.** Розглянуто питання розрахунку контактної сили в паралелограмному механізмі зняття обертового руху із сателітів кривошипно-планетарного редуктора залежно від кута повороту його ексцентрикового вала.

**Мета дослідження.** Розробка методики розрахунку контактної сили в паралелограмному механізмі залежно від кута повороту ексцентрикового вала редуктора і встановлення максимального її значення. Максимальне значення сили визначає максимальні напруження деталей механізму, а отже, і міцність редуктора в цілому.

**Методика реалізації.** На першому етапі на основі формул аналітичної геометрії контактні пари паралелограмного механізму класифіковано на ведучі (активні) та пасивні. На другому етапі наведено методику розрахунку контактної сили в активних контактних парах, яка побудована на засадах принципу можливих переміщень у рамках припущення про квазістатичний режим роботи кривошипно-планетарного редуктора. При обчисленні максимальних напружень у контактних парах застосована класична формула для циліндричних поверхонь.

**Результати дослідження.** Виведено формулу, яка дає змогу встановити номери ведучих контактних пар при заданому положенні ексцентрикового вала кривошипно-планетарного редуктора. Отримано циклограму контактної сили в кожній контактній парі. Представлено формулу для визначення наближеного максимального значення контактної сили в контактних парах, яка справедлива для редукторів із кількістю таких пар від 3 до 10.

**Висновки.** Надано результати розробленої методики розрахунку редукторів із паралелограмним механізмом зняття обертового руху із сателітів. З'ясовано, що при проектуванні редукторів із паралелограмним механізмом зняття обертового руху із сателітів актуальними є питання забезпечення динамічної міцності його деталей. При перевірці контактної міцності або міцності при згинанні в зубчастому зачепленні застосовні класичні методи розрахунку. У той же час при оцінці міцності сателіта в місці контакту з цівками вихідної ланки редуктора може бути застосована формула Герца, в якій як розрахункову контактну силу слід брати її максимальне значення, що наближено дорівнює  $X \cdot (4F_0 / KN)$ , де  $X = (0,8 + 0,05N)^{2-K}$ ;  $F_0 = T/L$ ;  $T$  – крутний момент на виході редуктора;  $KN$  – загальна кількість контактних пар;  $L$  – відстань між осями цівок і віссю редуктора. Наведена формула для  $\max(F_n)$  отримана для редукторів з  $K = 1; 2$  і  $N = \overline{3,5}$ .

**Ключові слова:** кривошипно-планетарний редуктор; контактна задача; розрахункова контактна сила.

### Вступ

Серед усього розмаїття механічних передач, які використовуються в машинобудуванні, особливе місце посідають сателітні/планетарні передачі [1]. Такі передачі завдяки гнучкості кінематичної схеми та її багатопотоковості дають змогу реалізовувати досить широкий діапазон значень передатних відношень і мають набагато менші масогабаритні характеристики порівняно з рядними зубчастими/черв'ячними передачами. Найбільшого поширення планетарні передачі набули у важконавантажених і відповідальних механічних приводах, в авіа- і суднобудуванні, в робототехніці й мехатронних системах, де вони практично не мають альтернативи [2, 3].

Крім класичних конструкцій планетарних передач [2], важливе прикладне значення мають

передачі з альтернативними структурними схемами, зокрема кривошипно-планетарні редуктори [4–6]. За принципом дії такий редуктор близький до хвильових передач, але в ньому відсутнє недовговічне гнучке колесо. У цих редукторах застосовують як позацентроїдні циклоїдальні та цівкові зачеплення, так і класичне евольвентне внутрішнє зачеплення з малою різницею чисел зубів коліс. Такі редуктори досить компактні, довговічні, мають високу навантажувальну і перевантажувальну здатність, характеризуються низьким рівнем шуму і вібрацій, мають малий момент інерції рухомих деталей і дають змогу реалізовувати широкий діапазон передатних чисел (за рахунок різної комбінації ведучих, ведених і нерухомих ланок).

Разом із тим кривошипно-планетарні редуктори не набули до цього часу значного поширен-

\* corresponding author: n.stelmakh@kpi.ua

ня [7]. До їх недоліків слід віднести високе радіальне навантаження на підшипники швидкохідного вала, що визначає дещо занижений порівняно з іншими планетарними редукторами ККД (приблизно 70–85 %). Стримувальним фактором їх застосування є також відсутність регламентованої методології їх кінематичного розрахунку, розрахунку на міцність і високі вимоги до культури виробництва через надлишкові кінематичні зв'язки [3] у реалізованому в ньому паралелограмному механізмі зняття обертального руху із сателітів.

У переважній більшості публікацій, присвячених питанням проектування таких редукторів, розглядаються пов'язані з особливостями розрахунку геометрії внутрішнього зачеплення проблеми, які зумовлені малою різницею кількості зубів (див. [5, 8–10]). У той же час питання аналізу міцності контактних пар паралелограмного механізму залишаються недостатньо вивченими. Цій проблематиці, зокрема визначенню максимального значення контактної сили в парі, і присвячена наша робота. Особливо актуальними викладені в роботі результати будуть для тих конструктивних рішень, де в контактних парах використовуються деталі з різних матеріалів.

### Постановка задачі

Метою роботи є отримання залежності контактної сили в циліндричній контактній парі паралелограмного механізму кривошипно-планетарного редуктора від кута повороту його ексцентрикового вала та виведення формули для наближеного розрахунку максимального значення вказаної сили. Поставлена мета досягається застосуванням комплексного підходу із залученням принципу можливих переміщень і припущення про квазістатичний режим роботи кривошипно-планетарного редуктора.

### Розрахункова схема редуктора

Розглядається кривошипно-планетарний редуктор, структурна схема якого показана на рис. 1. Ведучою ланкою редуктора виступає ланка 1, виготовлена у вигляді кривошипного вала з ексцентриситетом  $a_w$ . Встановлені на ньому сателіти 2 і 2' разом із корпусом 3 утворюють пари з'єднаних зубчастих коліс із внутрішнім зачепленням. У тілі кожного сателіта є рівномірно розподілені по колу радіусом  $L$   $N$  отворів із радіусом  $R$ . За допомогою цих поверхонь приводиться в обер-

тання вихідна ланка 4 через пальці радіусом  $r$ , які входять в отвори сателітів.

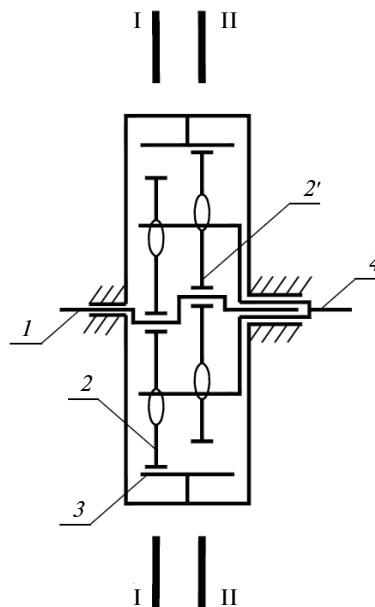


Рис. 1. Структурна схема редуктора: 1 – ведуча ланка; 2, 2' – сателіти; 3 – корпус; 4 – вихідна ланка

Провівши розрізи I–I і II–II по сателітах 2 і 2', як показано на рис. 1, отримуємо фронтальні вигляди редуктора (рис. 2). На цьому рисунку наочно зображені як геометричні параметри редуктора, так і протифазні положення сателітів. У принципі кількість сателітів, які далі позначено  $K$ , може бути рівною 1, однак з метою зменшення динамічних навантажень редуктора за рахунок зрівноваження оберткових мас і збільшення навантажувальної здатності такі редуктори, як правило, комплектуються двома сателітами ( $K = 2$ ). Кількість отворів у кожному сателіті зазвичай покладають рівною 3 або 4 (на рис. 2 розглянуто редуктор із  $N = 3$ ).

На рис. 2 фігури  $OA_nB_nC_n$  ( $n = \overline{1, KN}$ ) являють собою паралелограми зі сторонами  $L$  і  $R - r = a_w$  і відносяться до згаданого раніше механізму зняття обертального руху із сателітів. Зовнішні кола для сателітів 2 і 2' зображують початкові діаметри їх зубчастих вінців, коло 3 – початковий діаметр колеса з внутрішнім вінцем. Цифрами  $4.n$  ( $n = \overline{1, KN}$ ) на цьому рисунку позначені контактні пари “пальців” ланки 4 з отворами сателітів, причому номери  $n = \overline{1, N}$  відповідають парам “ланка 4–сателіт 2'”,  $n = \overline{N + 1, KN}$  (при  $K = 2$ ) – парам “ланка 4–сателіт 2””.

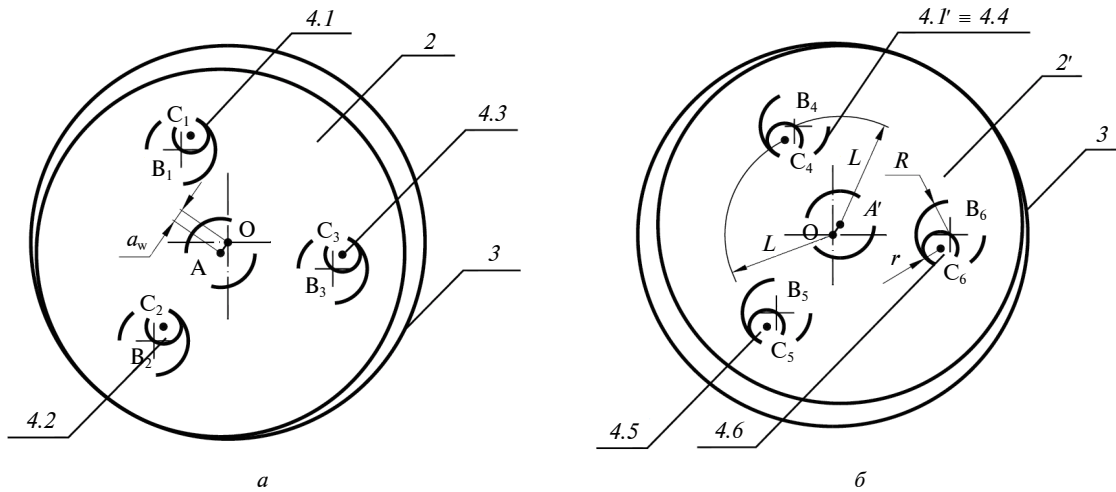


Рис. 2. Фронтальний вигляд редуктора з нумерацією контактних пар при  $K = 2$  і  $N = 3$ : а – розріз I–I; б – розріз II–II

**Методика розв’язання**

Використовуючи метод Вілліса [8], нескладно отримати формулу для передатного відношення від ланки 1 до сателітів:

$$i_{12} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{z_2}{z_3 - z_2},$$

яке записане в припущенні, що колесо 3 із внутрішнім зубчастим вінцем загальмовано.

У цій формулі  $\varphi_2$  – кут повороту сателітів відносно їх початкового положення при повороті ланки 1 на кут  $\varphi_1$ ;  $z_2, z_3$  – числа зубів коліс 2/2' і 3. Від’ємний знак у результаті для  $i_{12}$  означає, що обертання сателітів і ведучого кривошипа спрямовані протилежно.

Оскільки має місце безззорний контакт пар ланок “2/2’–4”, а фігури  $OA_nB_nC_n$  ( $n = \overline{1, KN}$ ) являють собою паралелограми, то кутові швидкості сателітів і ланки 4 рівні:

$$i_{14} = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} = i_{12}.$$

Очевидно, що при передачі обертового руху від кривошипа 1 до ланки 4 не всі контактні пари між елементами ланок “2/2’–4” є ведучими. Поділ пар на ведучі та “пасивні” для конкретного значення  $\varphi_1$  можна встановити за значенням кута тиску  $\alpha$  у відповідній контактній парі: у ведучих  $\alpha$  знаходиться в діапазоні від  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ . При цьому під  $\alpha$  розуміється кут між векторами швидкості центра пальця  $C_n$  ланки 4 і силою  $F_n$  контактної взаємодії в  $n$ -ій парі (рис. 3).

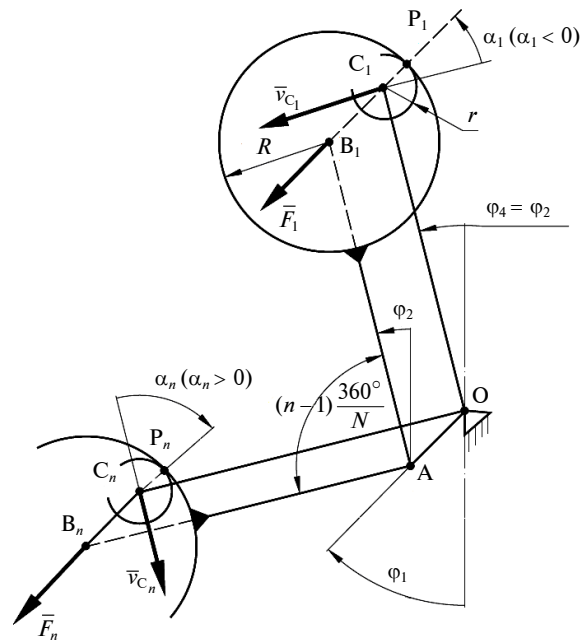


Рис. 3. Визначення кута тиску  $\alpha_n$

З використанням прийнятих раніше позначень розрахунковий вираз для  $\alpha_n$  запишеться таким чином:

$$\alpha_n = E \left( \varphi_1 \cdot (1 - i_{14}^{-1}) + \Delta\varphi_n + [e(n, N) - 1] \frac{360^\circ}{N} \right) \quad (1)$$

$$(n = \overline{1, KN}),$$

де  $E(x) = e(x, 360^\circ) - 90^\circ$ ;  $e(x, X)$  – залишок від ділення  $x$  на  $X$ ;  $\Delta\varphi_n = \begin{cases} 0, & n \leq N; \\ 180^\circ, & n > N. \end{cases}$

Для автоматизації подальших розрахунків можна покласти  $\alpha_n = 90^\circ \cdot \text{sign}(\alpha_n)$  при  $|\alpha_n| > 90^\circ$ .

Формула (1) дає змогу встановити номери ведучих контактних пар при заданому куті  $\varphi_1$  кривошипа  $I$  відносно його початкового положення, яке показано на рис. 3. Для редукторів з  $N = 3$  при  $K = 1$  і  $2$  ці діаграми показані на рис. 4. Слід зазначити, що для обох випадків передатне число редукторів покладається рівним  $20$  ( $i_{14} = -20$ ).

З аналізу рис. 4, б отримаємо, що при  $K = 2$  у будь-який момент часу передача обертового руху від сателітів  $2$  і  $2'$  до ланки  $4$  здійснюється через  $N$  контактних пар. У той же час при  $K = 1$  і  $N = 3$  мають місце такі моменти, коли ведучою є одна контактна пара (при  $\varphi_1 = 90^\circ$  контакт виключно в парі  $n = 1$ , при  $\varphi_1 = 200^\circ$  – у парі  $n = 3$ ). При цьому максимально можлива кількість одночасно діючих ведучих контактних пар дорівнює  $2$  (при  $\varphi_1 = 45^\circ$  ведучі контактні пари  $n = 1$  і  $2$ , при  $\varphi_1 = 240^\circ$  – пари  $n = 2$  і  $3$ ). Разом із тим як при  $K = 2$ , так і при  $K = 1$  фазовий кут роботи кожної контактної пари за один повний оберт кривошипа визначається виключно передатним відношенням редуктора  $i_{14}$  і становить  $180^\circ/(1 - i_{14}^{-1})$ .

Саме кількість ведучих контактних пар і кут тиску в них визначають значення контактних напружень. Для їх обчислення може бути застосована формула Герца, яка для тіл обертання у вигляді циліндра і циліндричної порожнини має вигляд

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{w_H}{\rho}}, \quad (2)$$

де  $Z_E = \sqrt{E_1 E_2 / (\pi[E_1(1 - \nu_2^2) + E_2(1 - \nu_1^2)])}$  – коефіцієнт, який враховує механічні етичні властивості матеріалів ( $E_i, \nu_i$  – модулі Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалів пальця і сателітів);  $w_H = (F_n/b)K_A K_\alpha$  – питоме навантаження ( $F_n$  – розрахункова сила в парі,  $b$  – довжина контактної ділянки, яка дорівнює ширині сателітів;  $K_A$  – коефіцієнт динамічного навантаження;  $K_\alpha$  – коефіцієнт нерівномірності розподілу напруги між контактними парами);  $\rho = Rr/(R - r)$  – зведений радіус кривизни поверхонь.

Навантаження  $F_n$  у  $n$ -ій контактній парі, яке є складовою формули (2), може бути обчислене за припущення, що режим роботи такого редуктора є квазістатичним. Надамо ланці  $4$  можливий поворот на нескінченно малий кут  $\delta\varphi_4$  у припущенні, що сателіти  $2$  і  $2'$ , які контактують з опорним колесом  $3$ , є нерухомими. Тоді відповідно до принципу можливих переміщень сума елементарних робіт сил і моментів сил при такому можливому переміщенні дорівнює нулю:

$$T \cdot \delta\varphi_4 - \sum_{n=1}^{K \cdot N} F_n \cdot \delta r_n = 0, \quad (3)$$

де  $T$  – зовнішній крутний момент, прикладений до ланки  $4$ ;  $\delta r_n$  – нормальне зміщення точки  $P_n$  прикладання сили  $F_n$  у  $n$ -ій парі при повороті ланки  $4$  на  $\delta\varphi_4$ .

Очевидно, що розглянута задача належить до класу статично невизначених, оскільки  $KN$  значень  $F_n$ , що входять у рівняння (3), є шуканими. Варто зазначити, що не всі  $F_n$  невідомі, а тільки ті, індекси яких для розрахункового положення  $\varphi_1$  відповідають ведучим парам (рис. 4, для "пасивних" контактних пар  $F_n = 0$ ).

Для визначення ненульових значень  $F_n$  необхідно врахувати той факт, що при контакті циліндричних поверхонь співвідношення між кон-

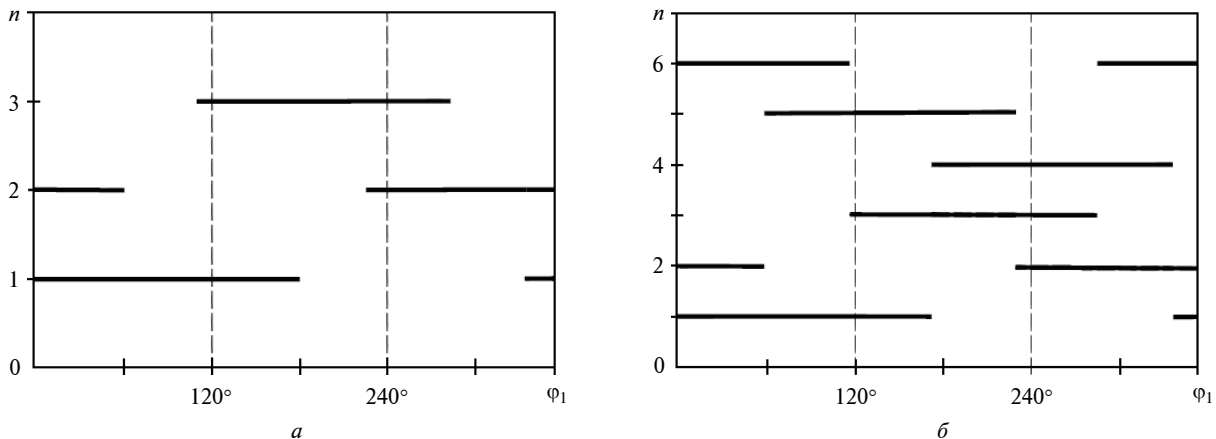


Рис. 4. Номери ведучих контактних пар при  $N = 3$ : а –  $K = 1$ ; б –  $K = 2$

тактною силою і кінематичною зміною їх між-осьових відстаней із прийнятною точністю можна вважати лінійним [11]. При фіксованому значенні  $\Delta\varphi_4 = \delta\varphi_4$  вираз для  $F_n$  може бути записаний таким чином:

$$F_n \approx A' \cdot \Delta r_n = A \cdot OP_n \cdot \cos(\beta_n),$$

де  $A, A'$  – коефіцієнти пропорційності;  $\Delta r_n$  – кінематичне зміщення точки контакту при повороті ланки 4 на  $\Delta\varphi_4$ ;

$$OP_n = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos(90^\circ - \alpha_n)};$$

$$\beta_n = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{L}{OP_n} \sin(90^\circ - \alpha_n)\right).$$

Можливе нормальне зміщення точки  $P_n$  дорівнює  $\delta r_n = L \cdot \delta\varphi_4 \cdot \cos(\alpha_n)$ . Слід зазначити, що під час запису останніх співвідношень використовувалися теореми косинусів і синусів та схеми дії контактних сил, які аналогічні контактній силі, показаній на рис. 5. Рис. 5 при цьому відображає картину навантаження 1-ї контактної пари ( $n = 1$ ).

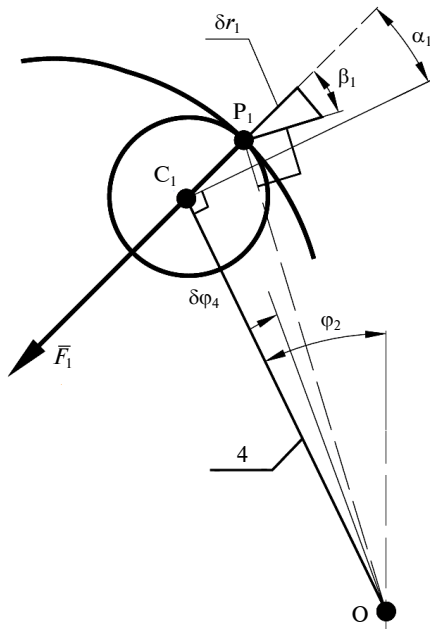


Рис. 5. Визначення контактної сили  $F_n$

Після нескладних математичних перетворень з урахуванням рівності (3) отримуємо такий вираз для  $n$ -ї контактної сили:

$$F_n = \frac{T \cdot OP_n \cdot \cos(\beta_n)}{L \sum_{j=1}^{KN} OP_j \cdot \cos(\beta_j) \cdot \cos(\alpha_j)}. \quad (4)$$

Слід зазначити, що сила  $F_n$ , як і змінні  $OP_n$ ,  $\beta_n$  і  $\alpha_n$ , що її визначають, залежить від положення кривошипного вала 1. Графіки зміни контактних сил  $F_n(\varphi_1)$  у межах роботи  $n$ -ї контактної пари, які обчислені за формулою (4), для редукторів з  $N = 3$  зображені на рис. 6.

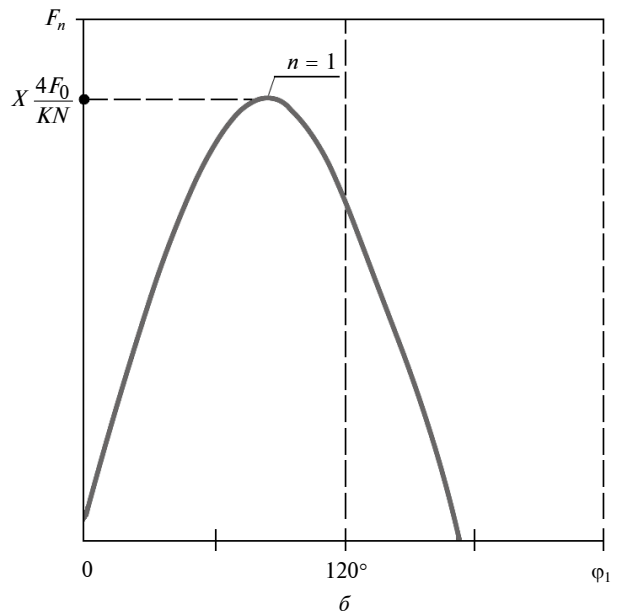
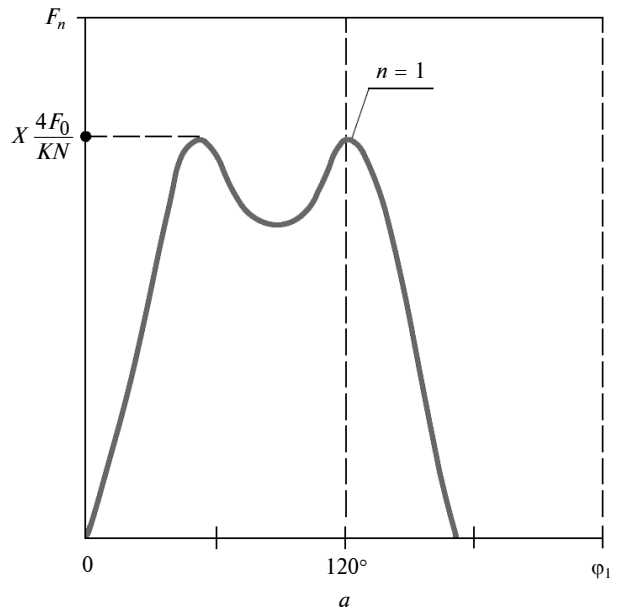


Рис. 6. Зміна контактної сили  $F_n(\varphi_1)$  за цикл: а –  $K = 1$ ; б –  $K = 2$

Виконані розрахунки також показали, що редуктор з  $N = 2$  не може працювати, оскільки в циклограмі роботи ведучих контактних пар (аналогічних зображеним на рис. 4) немає зон перекриття горизонтальних ліній. Тому в межах пере-

хідних зон розрахункове значення контактної сили прямує до нескінченності. В цілому з аналізу результатів проведених числових експериментів, частина яких показані на рис. 6, можна зробити висновок, що при кількості отворів  $N = 4; 5$  характер кривої  $F_n(\varphi_1)$  не залежить від кількості  $K$  сателітів і має досить близький до зображеного на рис. 6, б вигляд. При  $K = 2$  і довільному  $N$  або при  $K = 1$  і  $N > 3$  максимальне значення контактної сили в першій контактній парі має місце при  $\varphi_1 = 90^\circ / (1 - i_{14}^{-1})$  (див. рис. 6, б), для наступних контактних пар воно спостерігається з періодом  $180^\circ / N(1 - i_{14}^{-1})$  (див. рис. 4). При  $K = 1$  і  $N = 3$  сила  $F_n(\varphi_1)$  досягає максимуму при  $\varphi_1 \approx (90^\circ \pm \pm 45^\circ) / (1 - i_{14}^{-1})$ . Разом із тим як у першому, так і в другому розрахунковому випадку максимальне значення контактної сили  $F_n$  з прийнятною точністю (похибка не перевищує 2 %) може бути обчислене за формулою

$$\max(F_n) = X \frac{4F_0}{KN}, \quad (5)$$

де  $X = (0,8 + 0,05N)^{2-K}$  – коефіцієнт;  $F_0 = T/L$ .

Однак у першому наближенні при  $K = 1$  коефіцієнт  $X$  може покладатися рівним 1 (при  $K = 2$  цей коефіцієнт тотожно дорівнює одиниці).

Таким чином, при перевірці міцності сателітів/пальців із використанням класичної формули Герца (2) як розрахункове значення сили притискання необхідно брати її максимальне значення (5). При уточненому розрахунку, зокрема на витривалість за контактним напруженням, слід враховувати характер зміни кривої за цикл (рис. 6).

## Висновки

У роботі визначено основні тенденції розвитку кривошипно-планетарних редукторів, до яких

належать підвищення точності, навантажувальної здатності та ККД, збільшення надійності, довговічності та граничної частоти обертання. Також зазначено, що при проектуванні редукторів, у т.ч. із паралелограмним механізмом зняття обертального руху із сателітів, актуальними є питання забезпечення динамічної міцності його деталей. При перевірці контактної міцності або міцності при згинанні в зубчастому зачепленні застосовні класичні методи розрахунку. У той же час при оцінці міцності сателіта в місці контакту з цівками вихідної ланки редуктора може бути застосована формула Герца, в якій як розрахункову контактну силу слід брати її максимальне значення, що наближено дорівнює  $X \cdot (4F_0 / KN)$ , де  $X = (0,8 + 0,05N)^{2-K}$  – корегуючий коефіцієнт ( $X \approx 1$ );  $F_0 = T/L$ ;  $T$  – крутний момент на виході редуктора;  $KN$  – загальна кількість контактних пар;  $L$  – відстань між осями цівок і віссю редуктора. Слід зазначити, що наведена вище формула для  $\max(F_n)$  отримана для редукторів з  $K = 1; 2$  і  $N = \overline{3,5}$ .

Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку уточненої методики розрахунку на міцність деталей паралелограмного механізму кривошипно-планетарного редуктора, зокрема на вторму міцність деталей контактної пари, з урахуванням наведених у цій роботі циклограм контактної сили. Наявність таких методик дасть змогу суттєво спростити прийняття конструкторських рішень на етапі проектування кривошипно-планетарного редуктора і є необхідною складовою для натурної реалізації основних переваг зазначеного редуктора серед аналогів.

## References

- [1] *Planetary Gears*, V.N. Kudryavtseva and Yu.N. Kirdyasheva, eds. Leningrad, SU: Mashinostroenie, 1977 (in Russian).
- [2] V.V. Kozyrev, *Planetary Gearboxes as Part of Robots and Mechatronic Systems*. Vladimir, Russia: Vladimir State University Publ., 2008 (in Russian).
- [3] I.I. Artobolevsky, *Theory of Mechanisms and Machines*. Moscow, SU: Nauka, 1988 (in Russian).
- [4] C. Jiankun, "Small tooth number difference planetary gear drive with a crank and oscillating block inputting mechanism", *Appl. Mech. Mater.*, vol. 52-54, pp. 1268–1273. 2011. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.52-54.1268
- [5] S. Macovei and I. Doroftei, "An overview on internal geared mechanisms with small difference between teeth number", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, vol. 95, p. 012053, 2015. doi: 10.1088/1757-899X/95/1/012053

- [6] T.I. Plekhanov, "Structures and strength properties of planetary gear with internal linkings wheel strength", *East. Eur. Sci. J.*, iss. 1, pp. 144–156, 2014. doi: 10.12851/EESJ201402ART28
- [7] G.A. Timofeev *et al.*, "Crank-planetary reduction reducers with involute internal gearing with the difference of the number of teeth  $Z_d = 1$ ", *Konversija v Mashinostroenii*, no. 3, pp. 43–45, 2004 (in Russian).
- [8] O.E. Pechkovskaya *et al.*, "Modification of the internal involute gear with a small difference in the number of teeth of the wheels", *Bulletin of the Belarusian-Russian University*, no. 1, pp. 91–98, 2012 (in Russian).
- [9] F.I. Plekhanov and S.M. Molchanov, "Problems of designing a high-loaded planetary gear with a roller movement removal mechanism", *Bulletin of the Kazan State Technical University named after. A.N. Tupolev*, no. 3, pp. 64–67, 2012 (in Russian).
- [10] X.N. Feng, "Research on stress characteristics of planetary gear drive with small tooth number difference", in *Proc. 3rd Int. Conf. Mech. Eng. Intell. Syst.*, 2015, pp. 433–438. doi: 10.2991/icmeis-15.2015.80
- [11] I.A. Birger *et al.*, *Calculation of the Strength of Machine Parts*. Moscow, Russia: Mashinostroenie, 1993 (in Russian).

І.В. Янчевський, П. Комада, Н.В. Стельмах, Д.Н. Литвіненко

#### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРИВОШИПНО-ПЛАНЕТАРНОГО РЕДУКТОРА

**Проблематика.** Рассмотрены вопросы расчета контактной силы в параллелограммном механизме снятия вращательного движения с сателлитов в кривошипно-планетарном редукторе в зависимости от угла поворота эксцентрикового вала редуктора.

**Цель исследования.** Целью работы является разработка методики расчета контактной силы в параллелограммном механизме в зависимости от угла поворота эксцентрикового вала редуктора и определение максимального ее значения. Максимальное значение силы определяет максимальные напряжения деталей механизма, а следовательно, и прочность редуктора в целом.

**Методика реализации.** На первом этапе на основе формул аналитической геометрии контактные пары параллелограммного механизма классифицированы на ведущие (активные) и пассивные. На втором этапе приведена методика расчета контактной силы в активных контактных парах, которая построена на основе принципа возможных перемещений в рамках предположения о квазистатическом режиме работы кривошипно-планетарного редуктора. При расчете максимальных напряжений в контактных парах применима классическая формула для цилиндрических поверхностей.

**Результаты исследования.** Выведена формула, которая позволяет установить номера ведущих контактных пар при заданном положении эксцентрикового вала кривошипно-планетарного редуктора. Получена циклограмма контактной силы в каждой контактной паре. Представлена формула для определения приближенного максимального значения контактной силы в контактных парах, которая справедлива для редукторов с количеством таких пар от 3 до 10.

**Выводы.** Представлены результаты разработанной методики расчета редукторов с параллелограммным механизмом снятия вращательного движения с сателлитов. Выяснено, что при проектировании редукторов с параллелограммным механизмом снятия вращательного движения с сателлитов актуальными являются вопросы обеспечения динамической прочности его деталей. При проверке контактной прочности или прочности при изгибе в зубчатом зацеплении применимы классические методы расчета. В то же время при оценке прочности сателлита в месте контакта со струйками выходного звена редуктора может быть применена формула Герца, в которой в качестве расчетной контактной силы следует принимать ее максимальное значение, приблизительно равное  $X \cdot (4F_0 / KN)$ , где  $X = (0,8 + 0,05N)^{2-K}$ ;  $F_0 = T/L$ ;  $T$  – крутящий момент на выходе редуктора;  $KN$  – общее количество контактных пар;  $L$  – расстояние между осями струек и осью редуктора. Следует отметить, что приведенная выше формула для  $\max(F_n)$  получена для редукторов с  $K = 1; 2$  и  $N = \overline{3, 5}$ .

**Ключевые слова:** кривошипно-планетарный редуктор; контактная задача; расчетная контактная сила.

I.V. Yanchevsky, P. Komada, N.V. Stelmakh, D.N. Lytyvnenko

#### CONTACT PROBLEM FOR CRANK-PLANETARY REDUCTION GEAR

**Background.** The problem of calculating the contact force in the parallelogram mechanism for taking the rotary motion from satellites in the crank-planetary gearbox, depending on the angle of rotation of the eccentric shaft of the gearbox, is considered.

**Objective.** The aim of the paper is to develop a method for calculating the contact force in the parallelogram mechanism, depending on the rotation angle of the gear unit eccentric shaft and determination of its maximum value. The maximum force value determines the maximum stresses of the mechanism parts, and, consequently, the strength of the gear unit as a whole.

**Methods.** In the first stage, on the basis of formulas of analytical geometry, the contact pairs of the parallelogram mechanism are classified on leading (active) and passive. In the second stage, the method of calculating the contact force in active contact pairs is given. This method is based on the principle of possible displacements in the framework of the assumption about the quasi-static operation mode of the crank-planetary reducer. When calculating the maximum stresses in contact pairs the classical formula for cylindrical surfaces can be applied.

**Results.** A formula is derived that allows you to set the numbers of leading contact pairs at a given position of the crank-planetary reducer's eccentric shaft. The resulting graph of the contact force in each contact pair is obtained. The formula for determining the approximate maximum value of the contact force in contact pairs is presented, which is valid for reducers with the number of such pairs from 3 to 10.

**Conclusions.** The results of the developed method of calculation of reducers with the parallelogram mechanism for taking the rotary motion from the satellites are presented. It was found out that when designing gears with a parallelogram mechanism for taking the rotary motion from satellites, the issues of ensuring the dynamic strength of its parts are relevant. When checking the contact strength or bending strength in the toothed engagement classical calculation methods can be applied. At the same time, when evaluating the strength of the satellite in the place of contact with the trickles of the reducer output link, Hertz's formula can be applied, in which, as the design contact force, it should be taken to its maximum value, which is approximately equal to  $X \cdot (4F_0 / KN)$ , where  $X = (0,8 + 0,05N)^{2-K}$ ;  $F_0 = T/L$ ;  $T$  – torque at the output of the gear unit;  $KN$  – total number of contact pairs;  $L$  – The distance between the of the trickle axles and the gearbox axle. It should be noted that the above formula is obtained for reducers with  $K = 1; 2$  and  $N = \overline{3,5}$ .

**Keywords:** crank-planetary reducer; contact problem; design contact force.

Рекомендована Радою  
приладобудівного факультету  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
18 грудня 2017 року

Прийнята до публікації  
08 лютого 2018 року